Sur le problème de Kepler

Alain Guichardet

Sur le problème de Kepler

A. Guichardet

CMLS, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France

e-mail : guichardet.alain@wanadoo.fr

AMS Classification : 53 Differential Geometry

Key words : Kepler, hamiltonian.

Sur le problème de Kepler

A.Guichardet

Introduction

Ce que l'on appelle maintenant le “problème de Kepler” a suscité d'innombrables travaux depuis la démonstration, vers 1700, des trois lois de Kepler sur le mouvement des planètes à partir des lois de Newton, d'abord par Newton lui-même, puis par Herman et Johann Bernoulli ; on peut citer, parmi les apports successifs à la théorie, l'introduction du vecteur dit “de Lenz” , ou de “Laplace-Runge-Lenz”, ou de “Lenz-Pauli” , ou encore “vecteur excentricité”; ainsi que celle d'une action du groupe SO(4), prolongeant celle de SO(3), mais beaucoup moins évidente qu'elle, et appelée “symétrie cachée”.

Comment justifier, dans ces conditions, l'apparition d'une (n+1)-ième rédaction sur la question ? J'avancerai deux raisons. Tout d'abord, il m'a paru utile de faire une étude exhaustive du système hamiltonien que constitue l'espace des phases du problème de Kepler, en particulier description détaillée des différents types d'orbites du flot hamiltonien ainsi que des mouvements physiques correspondants ; ces résultats ne sont bien évidemment pas nouveaux, mais on est en droit de les trouver un peu trop épars dans la littérature , rédigés, dans des styles très variés, par des mathématiciens ou des physiciens ; j'ai jugé bon d'unifier le tout dans un style un peu – mais point trop – bourbachique , indiquant en annexe quelques termes plus familiers aux géomètres différentiels qu'aux autres mathématiciens ou physiciens. Je pense aussi que l'étude approfondie d'un exemple est toujours bénéfique et pas toujours plus facile que la théorie, d'autant plus que l'exemple choisi ici est particulièrement riche et permet d'introduire bon nombre de notions de Géométrie différentielle.

Une seconde raison, qu'on jugera peut-être plus sérieuse, est le désir d'exposer une construction rigoureuse et claire de l'action de SO(4). Pour ce faire, on peut distinguer deux approches. La première consiste à vérifier – ce qui nécessite des calculs fort fastidieux ! - que les trois composantes du *moment cinétique* L et celles du *vecteur de Lenz* A engendrent, par crochets de Poisson, une algèbre de Lie isomorphe à o(4) (Bacry-Ruegg-Souriau 1966 , Györgyi 1968 , Rogers 1973) ; en d'autres termes, on a une action de l'algèbre de Lie o(4) par champs de vecteurs sur l'espace des phases et on souhaite l'intégrer en une action du groupe de Lie simplement connexe correspondant, à savoir SU(2) $\times$ SU(2) ; mais on se heurte alors à des difficultés que, à ma connaissance, personne n'a réussi à surmonter : il faut, en particulier, compactifier les surfaces d'énergie et prolonger les champs de vecteurs aux compactifiés et on verra plus loin les difficultés que cela implique.

La seconde méthode consiste à remplacer l'espace des phases par le fibré cotangent à la sphère S^3 , sur lequel le groupe SO(4) va agir de façon évidente ; l'idée d'introduire S^3 et SO(4) est due au physicien soviétique V.Fock (1935), mais dans le cadre du traitement quantique de l'atome d'hydrogène et non dans celui, classique, du mouvement des planètes.

Fock construit une application ("projection stéréographique inverse") de l'espace des moments, i.e. des variables p , vers la sphère $\mathbf{S}^3$; Györgyi (1968), puis Moser (1970), passant au problème classique de Kepler, prolongent cette application en une application de l'espace des phases du problème de Kepler, i.e. des variables (q,p) , vers l'espace fibré cotangent $T^*(\mathbf{S}^3)$; c'est l'application notée Φ_0 au n° III.2 du présent travail ; cette application est un difféomorphisme et se comporte bien vis à vis des hamiltoniens, mais <u>pas</u> vis à vis des 2-formes différentielles symplectiques ; pour corriger ce défaut, Györgyi compose à gauche cette application avec une action du flot hamiltonien de $T^*(\mathbf{S}^3)$, obtenant ainsi ce que nous notons Φ_{LS} au n° III.4 ; il démontre que ce nouveau difféomorphisme se comporte bien vis à vis des flots hamiltoniens, mais ne considère pas son comportement vis à vis des 2-formes différentielles symplectiques ; Ligon et Schaaf (1976) le font après avoir précisé les calculs de Györgyi. Cushman et Duistermaat (1977) reprennent la question en évitant les calculs trop fastidieux, et démontrent l'unicité de Φ_{LS} .

Le présent travail expose cette construction d'une façon plus détaillée que dans Ligon et Schaaf ; en particulier nous explicitons la méthode employée par ces auteurs pour construire l'inverse de Φ_{LS} : elle nous a été utile pour étudier la topologie des compactifiés des surfaces d'énergie.

Nous donnons ensuite deux autres descriptions de Φ_{LS} basées sur deux paramétrisations de l'espace des phases keplérien ; elles simplifient grandement les formules donnant Φ_{LS} et son inverse.

Nous avons le plaisir de remercier ici A. Albouy et C.M. Marle pour l'aide précieuse apportée pendant la préparation de ce travail.

Plan de ce travail

Idée générale . Ce travail peut être considéré comme l'étude d'un *système hamiltonien* et de ses diverses réalisations ; nous entendons par là une variété différentielle munie d'une 2-forme différentielle symplectique ω et d'une fonction réelle H appelée *hamiltonien* ; à ces données sont associés canoniquement un champ de vecteurs $\zeta = X_H^\omega$ dit *hamiltonien* , et son flot Γ_t dit aussi *hamiltonien* ; on appellera *orbite* de ζ l'ensemble des valeurs prises par une solution maximale de ζ. On n'a pas hésité à exposer de très nombreux calculs, dont cependant les plus fastidieux sont seulement esquissés, laissant au lecteur le soin de combler certaines lacunes.

§ I. Espace des phases du problème de Kepler.

On notera Q l'espace de configuration $\mathbf{R}^3\backslash\{0\}$ et P le fibré cotangent T*(Q) = $Q\times\mathbf{R}^3$, avec éléments notés (q,p) . L'énergie est la fonction sur le fibré tangent T(Q) donnée par $E(q,v) = \dfrac{|v|^2}{2m} - \dfrac{m\gamma}{|q|}$ où m est la masse du point mobile et γ - la constante de gravitation. On a ensuite la transformation de Legendre, bijection T(Q)$\to$T*(Q) et, sur T*(Q), la structure de système hamiltonien formée

- de la 2-forme différentielle symplectique canonique $\omega = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$
- de l' hamiltonien $H(q,p) = \dfrac{|p|^2}{2m}$ - $\dfrac{m\gamma}{|q|}$

On note P_- le sous-espace de P défini par H < 0. Sur P_- :

- fonction réelle $p_0(q,p) = (-2mH(q,p))^{1/2}$
- champ de vecteurs hamiltonien $\zeta = X_H^\omega$ défini par ω et H

- flot de ζ (flot hamiltonien) $t \mapsto \Gamma_t$

- moment cinétique $L(q,p) = q \wedge p \in \mathbf{R}^3$

- vecteur de Lenz $A(q,p) = \frac{1}{p_0}(p \wedge L(q,p) - \frac{m^2\gamma}{|q|}.q) \in \mathbf{R}^3$.

L'espace des orbites dans P_- est paramétré par les valeurs de L et A. Quant à la paramétrisation de chaque orbite, on utilise, dans le cas où L et A sont non nuls (cas d'une orbite képlérienne elliptique non circulaire) , une paramétrisation à l'aide de *l'anomalie vraie* θ du point q . On présente ensuite, dans le cas général, une seconde paramétrisation à l'aide d'un paramètre η qui, dans le cas où L et A sont non nuls, est *l' anomalie excentrique* du point q ; puis une troisième paramétrisation à l'aide d'un paramètre λ qui, dans le cas où L et A sont non nuls, est *l'anomalie moyenne* du point q ; c'est avec ce paramètre que la description du flot hamiltonien est la plus simple : l'évolution dans le temps t consiste à ajouter au paramètre λ un multiple de t , fonction seulement de l'orbite.

§ II. Espace fibré cotangent à la sphère S^3.

Ici l'espace de configuration, noté Q', est la sphère S^3 ; on notera P' le fibré cotangent $T^*(Q')$, P_0' ce fibré privé de sa section nulle, et ω' la 2-forme différentielle symplectique canonique sur P' .
Identifiant $\mathbf{S}^3$ à la sphère unité de $\mathbf{R}^4$, on munit $\mathbf{S}^3$ d'une structure de variété riemannienne , laquelle définit un lagrangien , une transformation de Legendre bijective et un hamiltonien noté H' sur $T^*(\mathbf{S}^3)$; muni aussi de la forme symplectique canonique d'un fibré cotangent, soit ω' , on obtient sur $T^*(\mathbf{S}^3)$ une structure hamiltonienne, dont on détermine le champ de vecteurs ζ' en coordonnées locales.
On définit aussi des objets analogues, notés H'' , ω'' , ζ'' sur $T^*(\mathbf{R}^4)$; pour cela on identifie cet espace à $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ et on note P_0'' l'ensemble des $(x,y) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ tels que $|x|=1$, $(x|y)=0$, $y \neq 0$; on a alors une bijection de P_0' sur P_0'' ,et on détermine les restrictions de H'' , ω'' , ζ'' à P_0' .

§ III. Passage de $T^*(\mathbf{R}^3\backslash\{0\}$ à $T^*(\mathbf{S}^3$) via $T^*(\mathbf{R}^4)$.

(Méthode de Ligon-Schaaf et Cushman-Duisterman)

On pose $P''_{0,-} = \{(x,y) \in P''_0 \mid x_0 < 1\}$. On construit une première application $\Phi_0 : P_- \to P''_{0,-}$: $\Phi_0(q,p) = (x,y)$ où

$$x_0 = \frac{|q|.|p|^2}{m^2\gamma} - 1 = \frac{|p|^2 - p_0^2}{|p|^2 + p_0^2}$$

$$\vec{x} = \frac{p_0}{m^2\gamma} |q|.p = \frac{2p_0}{|p|^2 + p_0^2}.p$$

$$y_0 = -(q \mid p)$$

$$\vec{y} = \frac{m^2\gamma}{p_0}(-\frac{q}{|q|} + \frac{(q \mid p)}{m^2\gamma}.p) = \frac{1}{p_0}(-\frac{|p|^2 + p_0^2}{2}.q + (q \mid p).p) .$$

Cette application est un difféomorphisme $P_- \to P''_{0,-}$, qui se comporte mal vis à vis des formes symplectiques :

(1) $$\Phi_0^*(\omega'') = \omega + \mathrm{d}(q \mid p) \wedge \frac{\mathrm{d}p_0}{p_0}$$

ainsi que des équations du mouvement qui deviennent

(2) $$\dot{x} = \frac{m^3\gamma^2}{|y|^4 (1 - x_0)}.y \ , \ \dot{y} = -\frac{m^3\gamma^2}{|y|^2 (1 - x_0)}.x \ .$$

On construit une seconde application $\Phi_{LS} : P_- \to P''_{0,-}$ définie par $\Phi_{LS}(q,p) = \Gamma''_{y_0 |y|^2}(x,y)$ où Γ''_t est le flot de ζ'' ; elle a les propriétés suivantes :

(3) c'est un difféomorphisme $P_- \to P''_{0,-}$

(4) ce difféomorphisme est symplectique, i.e. $\Phi_{LS}^*(\omega'') = \omega$

(5) $\Phi_{LS}^*(H'') = m^3\gamma^2 H$

(6) $\Phi_{LS} \circ \Gamma_t \circ \Phi_{LS}^{-1} = \Gamma''_{m^3\gamma^2 t}$

(7) $L'' \circ \Phi_{LS} = L$, $A'' \circ \Phi_{LS} = A$

(8) nouvelles équations du mouvement :

$$\dot{x} = \frac{m^3\gamma^2}{|y|^4}.y \ , \ \dot{y} = -\frac{m^3\gamma^2}{|y|^2}.x \ .$$

Suite du § III :

Calcul détaillé de l'inverse de Φ_{LS} (explication de la formule donnée par Ligon et Schaaf).
Démonstration de l'unicité de Φ_{LS} .

Etude de la topologie des compactifiés des surfaces d'énergie ; on utilise un lemme déjà utilisé dans le point précédent ; on constate qu'une construction directe de ces compactifiés, i.e. sans passer par T*($\mathbf{S}^3$), ne semble guère possible.
Autres descriptions de Φ_{LS} et de son inverse utilisant les deux paramétrisations de P_{-}. Le difféomorphisme Φ_{LS} mérite le nom de "régularisation" parce que le flot hamiltonien de P' est défini pour tout temps t, contrairement à ce qui se passe dans le cas de P.

§ IV. Action des groupes SO(3) et SO(4) et de leurs algèbres de Lie.

L'action naturelle de SO(4) sur $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ conserve P'', la forme différentielle symplectique et l'hamiltonien. Calcul de l'action dérivée de l'algèbre de Lie o(4) et de son application moment. En revenant à P_{-} par l'inverse de Φ_{LS}, on vérifie que cette action de o(4) est effectivement définie par les 6 composantes de L et A, dont on obtient ainsi les crochets de Poisson sans calculs supplémentaires.

Analyse de quelques travaux récents

1) Györgyi (1968).

On part de la constatation que, par projection orthogonale, un mouvement circulaire à 4 dimensions est transformé en un mouvement de Kepler (p. 721) ; cela conduit naturellement à introduire deux vecteurs à 4 dimensions π et ρ qui sont, à quelques changements de signe près, nos $p_0 x$ et $\frac{1}{p_0} y$ où $(x,y) = \Phi_0(q,p)$ (p. 725). On obtient les équations du mouvement indiquées ci-dessus (formule (2)), mais il ne semble pas être question de formes différentielles symplectiques. Pour remédier au mauvais comportement du couple (π,ρ) vis à vis des équations du mouvement, on lui fait subir une transformation $(\pi,\rho) \mapsto (b,c)$ (p.

729), qu'il semble possible d'interpréter comme étant notre application $(x,y) \mapsto \Gamma''_{y_0 |y|^2}(x,y)$ et on obtient les équations du mouvement ci-dessus (8).
Enfin on décrit l'action de l'algèbre de Lie o(4) sur ces variables (b,c) .

2) Moser (1970).

On prend ici $m=\gamma=1$; on part de la projection stéréographique, notée $\xi \mapsto x$, de la sphère $\mathbf{S}^n$ privée du pôle nord, vers $\mathbf{R}^n$; on la prolonge aux fibrés tangents en une application notée $(\xi,\eta) \mapsto (x,y)$; l'inverse de cette application (p. 613) coïncide, à quelques changements de signe près, avec l'application que nous noterons Φ'_0, obtenue à partir de notre Φ_0 en y remplaçant p_0 par 1 . On obtient une bonne correspondance entre orbites képlériennes et grands cercles, mais en restriction aux diverses surfaces d'énergie ; la formule (1) ci-dessus montre que l'application de Moser est symplectique, bien que l'auteur ne mentionne pas les formes différentielles symplectiques. On doit ensuite recoller les diverses surfaces d'énergie, mais, comme le fait remarquer C.M.Marle (n° 3.11), l'application obtenue n'est plus symplectique.

3) Ligon- Schaaf (1976).

Les auteurs complètent et précisent le mémoire de Györgyi, mais en adoptant un style plus mathématicien. Ils introduisent les formes différentielles symplectiques notées ci-dessus ω et ω'' , ainsi que l'application notée ici Φ_{LS} ; ils démontrent que c'est un difféomorphisme $P_- \to P''_{0,-}$ en calculant explicitement son inverse (p. 285), et prouvent aussi son bon comportement vis à vis des formes différentielles symplectiques, des hamiltoniens et des flots.
Ils examinent l'action de SO(4) sur $P''_{0,-}$ et en déduisent les crochets de Poisson des composantes des vecteurs L et A .

4) Cushman-Duistermat (1997).

Les auteurs posent $m=\gamma=1$ et reprennent l'application Φ_{LS} introduite par Ligon et Schaaf ; ils démontrent , en diminuant sensiblement les calculs de Ligon et Schaaf, les propriétés énoncées ci-dessus par les formules (3) à (7) ; ils prouvent aussi (proposition 4.3) que ces 5 propriétés caractérisent entièrement l'application Φ_{LS} . Enfin ils utilisent le moment de l'action de o(4).

5) Heckman-de Laat (à paraître).

On prend encore $m=\gamma=1$. La projection stéréographique inverse $\mathbf{R^n}\to\mathbf{S}^n$, prolongée aux fibrés cotangents, n'est autre que l'application $(q,p)\mapsto\Phi_0^{'}(p,-q)$ où $\Phi_0^{'}$ a été définie plus haut (n° 2)) ; elle est symplectique par construction. On obtient l'application $\Phi_0^{'}$ en composant la précédente avec la transformation $(q,p)\mapsto(p,-q)$, elle-même symplectique ; donc $\Phi_0^{'}$ est symplectique : c'est la "Moser regularization" (p. 6).
On définit ensuite la "Ligon-Schaaf regularization" par la formule

$$(q,p)\mapsto(\cos(p_0y_0).x+\sin(p_0y_0).p_0y\ ,\ \frac{1}{p_0}(-\sin(p_0y_0).x+\cos(p_0y_0).p_0y))\ ;$$

elle coïncide avec notre Φ_{LS}. On examine le comportement de cette application vis à vis des hamiltoniens et des équations du mouvement ; on en déduit, par un raisonnement court et plutôt elliptique, qu'elle est symplectique (théorème 3.4). Enfin on étudie le moment de l'action de l'algèbre de Lie $o(4)$.

6) Marle (à paraître).

L'auteur démontre un théorème général expliquant pourquoi l'application $(x,y)\ \mapsto\ \Gamma^{''}_{y_0|y|^2}(x,y)$ transforme la forme différentielle symplectique ω_2, image de ω par Φ_0, en l'image ω_1 de ω par Φ_{LS}.
On désignera par ξ un couple arbitraire (x,y) et par X et Y les champs de vecteurs sur $P^{''}_{0,-}$ conduisant respectivement aux équations du mouvement (8) et (2) ; on remarque

a) que X et Y sont reliés par la relation $Y=gX$ où g est la fonction réelle $g(\xi)=\dfrac{1}{1-x_0}$

b) qu'il existe une fonction réelle σ sur $\mathbf{R}\times P^{''}_{0,-}$, à savoir $\sigma(t,\xi)=t-y_0\,|\,y\,|^2$, satisfaisant la condition $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma(t,\varphi(t))=\mathrm{g}(\varphi(\mathrm{t}))$ pour toute solution φ de Y.

Le théorème général (théorème 2.4) affirme alors que dans cette situation, on obtient un difféomorphisme Ξ transformant ω_2 en ω_1 en posant $\Xi(\xi)=\Phi_X(-\sigma(0,\xi),\xi)$ où Φ_X désigne le flot de X.

7) Albouy (communication écrite).

L'auteur donne une démonstration courte de l'existence d'une symétrie SO(4) en s'appuyant sur une description de style très géometrique de

l'inverse de notre application Φ_{LS} ; avec nos notations, on peut la décrire comme suit.
Soit (x,y) un élément de $P''_{0,-}$ et $(q,p)=\Phi_{LS}^{-1}(x,y)$; grâce à la formule (7) ci-dessus, les vecteurs $l=L''(x,y)$ et $a=A''(x,y)$ déterminent l'orbite keplérienne O à laquelle appartient (q,p) ; posons $(q',p') = \Phi_0^{-1}(x,y)$, c'est-à-dire

$$q' = -\frac{|y|}{m^2\gamma}(\vec{y}+a) \quad , \quad p' = \frac{m^2\gamma}{|y|(1-x_0)}\vec{x} \ ;$$

Alors (q,p) est le point de O dont l'anomalie moyenne est égale à l'anomanlie excentrique de (q',p') . A.Albouy décrit le passage de y à q sous la forme "project, translate, stretch" (on fait abstraction du facteur $-\frac{|y|}{m^2\gamma}$ dû à une différence de normalisation dans les définitions) où ces 3 opérations sont respectivement les applications $y \mapsto \vec{y}$, $\vec{y} \mapsto \vec{y}+a$, remplacement d'anomalie moyenne par anomalie excentrique.
On en déduit ensuite p en utilisant les équations du mouvement.

Travaux cités

- A.Albouy . Communication écrite, 2010.
- R.H.Cushman-J.J.Duisterman. A Characterization of the Ligon-Schaaf Regularization Map (Comm. Pure Applied Math., t. 50, 1997, p. 773-787).
- G.Györgyi. Kepler's Equation, Fock Variables, Bacry's Generators and Dirac Brackets (Nuovo Cimento, t. A 53, 1968, p. 717-735).
- G.Heckman-T. de Laat. On the Regularization of the Kepler Problem (à paraître).
- T.Ligon-M.Schaaf. On the Global Symmetry of the Classical Kepler Problem (Rep. Math. Phys., t. 9, 1976, p. 281-300).
- C.M. Marle. A Property of Conformally Hamiltonien Vector Fields ; Application to the Kepler Problem (à paraître).
- J.Moser. Regularization of Kepler's Problem and the Averaging Method on a Manifold (Comm. Pure Applied math., t. XXIII, 1970, p. 609-636).

§ I. Espace des phases du problème de Kepler.

n° I.1. Généralités.

On utilisera les notations suivantes :

. *Espace de configuration* $Q = \mathbf{R^3}\backslash\{0\}$.
. *Espace fibré tangent* $\mathrm{T}(Q) = Q \times \mathbf{R^3}$, éléments notés (q,v) .
. *Lagrangien* sur $\mathrm{T}(Q)$:

$$L(q,v) = \frac{m}{2}|v|^2 + \frac{m\gamma}{|q|}$$

où m et γ sont des réels fixés > 0 .

. *Espace fibré cotangent (espace des phases du problème de Kepler)*

$$P = \mathrm{T}^*(Q) = Q \times \mathbf{R^3} \text{ , éléments notés } (q,p) .$$

. *Transformation de Legendre* (bijective)

$$F : \mathrm{T}(Q) \to \mathrm{T}^*(Q)$$

$$F(q,v) = (q,p) \quad \text{où} \quad p = mv .$$

. *Energie* sur $\mathrm{T}(Q)$:

$$E(q,v) = \frac{m}{2}|v|^2 - \frac{m\gamma}{|q|} .$$

. *Hamiltonien* sur $\mathrm{T}^*(Q)$:

$$H(q,p) = E(F^{-1}(q,p)) = \frac{|p|^2}{2m} - \frac{m\gamma}{|q|} .$$

. Sous-espace de P :

$$P_- = \{(q,p) \in P \mid H(q,p) < 0\} .$$

. Sur ce sous-espace, fonction réelle

$$p_0 \ (q,p) = (-2mH(q,p))^{1/2}$$

. 1-*forme différentielle de Liouville* :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} p_i \mathrm{d}q_i \qquad \text{que l'on notera} \quad (p \mid \mathrm{d}q)$$

. 2-*forme différentielle symplectique* :

$$\omega = \mathrm{d}\alpha = \sum_i \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i \, .$$

que l'on notera $(\mathrm{d}p \mid \mathrm{d}q)$
Les objets ω et H confèrent à P la structure de *système hamiltonien* (cf. Annexe A.4) .

. *Champ de vecteurs hamiltonien* :

$$\zeta = \mathrm{X}_H^{\omega} = \frac{1}{m}(p \mid \frac{\partial}{\partial q}) - \frac{m\gamma}{\mid q \mid^3} (q \mid \frac{\partial}{\partial p}) \ .$$

. *Flot hamiltonien* noté $t \mapsto \Gamma_t$: toute solution maximale de ζ, i.e. de l'équation différentielle de Hamilton (ou *équation du mouvement*) :

$$\dot{q} \ = \ \frac{p}{m} \ , \ \dot{p} \ = \ - \ \frac{m\gamma}{\mid q \mid^3} q \ .$$

. *Orbite* de ζ (orbite de l'espace des phases) : ensemble des valeurs prises par une solution maximale.
. *Orbite képlérienne* : projection d'une orbite de ζ sur l'espace de configuration .

Remarque. Si on attribue aux grandeurs q, p, γ, m respectivement les poids 1,1,3,0 , toutes les égalités doivent être homogènes, ce qui permet souvent de détecter des erreurs de calcul.

n° I.2. Etude de deux fonctions vectorielles sur P_- .

On rappelle une formule utile relative au produit vectoriel dans $\mathbf{R}^3$ noté $. \wedge .$:

$$(a \wedge b) \wedge c \ = \ (a \mid c).b \text{ - } (b \mid c).a \ .$$

. *Moment cinétique*

$$L(q,p) = q \wedge p \ \in \ \Lambda^2 \mathbf{R}^3$$

de composantes

$$L(q,p)_{i,j} = q_i p_j - q_j p_i \ .$$

On peut aussi considérer $L(q,p)$ comme élément de $\mathbf{R}^3$, de composantes

$$L(q,p)_1 = q_2 p_3 - q_3 p_2 \quad \text{et permutations circulaires .}$$

. *Vecteur de Lenz*

(I.1)
$$A(q,p) \ = \ \frac{1}{p_0} \ (p \wedge L(q,p) - \frac{m^2\gamma}{|q|} . q)$$

soit encore

(I.2)
$$A(q,p) \ = \ \frac{1}{p_0} \ ((|p|^2 \ - \frac{m^2\gamma}{|q|}) . q \ - \ (q \,|\, p).p) \ .$$

On a les relations

$$(L(q,p) \,|\, A(q,p)) \ = \ 0$$

et

$$|L(q,p)|^2 \ + \ |A(q,p)|^2 \ = \frac{m^4\gamma^2}{p_0^2} > 0.$$

Lemme I.1. *Les fonctions* L *et* A *sont annulées par le champ de vecteurs* ζ *, i.e. sont constantes sur les orbites.*

Démonstration. Calcul.

n° I.3. Paramétrisations de P_- .

n° I.3.1. Généralités.

On écrira les vecteurs de $\mathbf{R}^4$ sous la forme $x = (x_0,...,x_3)$. On définit une application $M : P_- \to \Lambda^2\ \mathbf{R}^4$ par

$$M(q,p)_{i,j} = \begin{cases} L(q,p)_{i,j} \text{ si } 1 \le i < j \le 3 \\ -A(q,p)_{i,j} \text{ si } 0 = i < j \le 3 \end{cases}$$

(L'intérêt de M apparaîtra au § IV : *application moment* d'une action de l'algèbre de Lie o(4))

On va décrire les fibres de M , ensembles

$$M^{-1}(l,a) = \{(q,p) \in P_- \mid L(q,p) = l, A(q,p) = a\}$$

où l et a sont des vecteurs donnés de $\mathbf{R}^3$ orthogonaux et non tous deux nuls. D'après le lemme I.1 , toute orbite de ζ est contenue dans un ensemble $M^{-1}(l,a)$, mais l'étude qui va suivre démontrera le

Lemme I.2. *Les fibres de* M *sont exactement les orbites de* ζ.

n° I.3.2. Première paramétrisation (cas où l et a sont non nuls).

(Orbites képlériennes elliptiques non circulaires)

Soit donc (l,a) un tel couple ; on définit une base orthonormée $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ de $\mathbf{R}^3$ par

$$\varepsilon_1 = \frac{a}{|a|}\ ,\ \varepsilon_3 = \frac{l}{|l|}\ ,\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_1\ ;$$

on pose

$$\overline{p_0} = \frac{m^2\gamma}{(|l|^2 + |a|^2)^{1/2}}$$

Pour tout réel θ on pose

$$\text{(I.3)} \qquad q_{l,a}(\theta) = \frac{|l|^2}{\overline{p_0}\,|a|.\cos\theta + m^2\gamma}(\cos\theta.\varepsilon_1 + \sin\theta.\varepsilon_2)$$

$$\text{(I.4)} \qquad p_{l,a}(\theta) = \frac{1}{|l|}(-m^2\gamma.\sin\theta.\varepsilon_1 + (\overline{p_0}\,|a| + m^2\gamma.\cos\theta).\varepsilon_2)\,.$$

Théorème I.1. *Un couple* $(q,p)\in P_-$ *appartient à* $M^{-1}(l,a)$ *si et seulement s'il est de la forme* $(q_{l,a}(\theta), p_{l,a}(\theta))$ *. Dans ce cas* $\overline{p_0} = p_0(p,q)$; θ *est unique* mod $2\pi\mathbf{Z}$ *et appelé anomalie vraie du point* q .

Démonstration.

Condition suffisante : calcul facile.
Condition nécessaire. Les vecteurs q et p, étant orthogonaux à l , sont dans le plan engendré par ε_1 et ε_2 ; q est de la forme

$$q = |q|.(\cos\theta.\varepsilon_1 + \sin\theta.\varepsilon_2) \ ;$$

on écrit $(q\,|\,a)$ de deux façons différentes :

$$(q\,|\,a) \ = \ |\,a\,|.|\,q\,|.\cos\theta$$

et

$$(q\,|\,a) \ = \ \frac{1}{p_0}((q\,|\,p\wedge l) - m^2\gamma\,|\,q\,|) \ ;$$

utilisant la formule générale

$$(u\,|\,v\wedge w) \ = \ (u\wedge v\,|\,w) \ ,$$

on obtient

$$(q\,|\,a) \ = \ \frac{1}{p_0}(|\,l\,|^2 - m^2\gamma\,|\,q\,|)$$

d'où résulte que $|\,q\,|$ a la valeur indiquée puisque $\overline{p_0} = p_0$.
Pour montrer que p a la valeur souhaitée, on écrit

$$a \ = \ \frac{1}{p_0}\ (p\wedge l - \frac{m^2\gamma}{|\,q\,|}.\,q).$$

Description de l'ensemble $M^{-1}(l,a)$.

Le point $q_{l,a}(\theta)$ décrit l'ellipse ayant les éléments suivants :

. un foyer est au point 0

. périhélie : $\dfrac{|\,l\,|^2}{p_0\,|\,a\,| + m^2\gamma}\ \varepsilon_1$

. aphélie : $\dfrac{|\,l\,|^2}{p_0\,|\,a\,| - m^2\gamma}\ \varepsilon_1$

. demi grand axe : $\alpha = \dfrac{m^2\gamma}{p_0^2}$

. demi petit axe : $\beta = \dfrac{|l|}{p_0}$

. excentricité : $e = (1-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2})^{1/2} = \dfrac{p_0 |a|}{m^2\gamma} > 0$

. centre : $-\alpha e.\varepsilon_1$.

Le point $p_{l,a}(\theta)$ décrit le cercle (*hodographe*) de centre $\dfrac{p_0 |a|}{|l|}.\varepsilon_2$ et de rayon $\dfrac{m^2\gamma}{|l|}$.

Flot hamiltonien.

On a

$$\frac{\mathrm{d}q_{l,a}(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{|q_{l,a}(\theta)|^2}{|l|}.p_{l,a}(\theta) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}p_{l,a}(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{m^2\gamma}{|l|.|q_{l,a}(\theta)|}.q_{l,a}(\theta) \ .$$

Il en résulte que, si θ est fonction de t , la fonction $t \mapsto (q_{l,a}(\theta(t)) , p_{l,a}(\theta(t)))$ est solution de ζ si et seulement si

(I.5) $$\dot\theta = \frac{1}{m|l|^3}(p_0 |a|.\cos\theta + m^2\gamma)^2 \ .$$

En vertu des théorèmes généraux sur les équations différentielles, les solutions maximales sont définies pour tout réel t ; comme la dérivée est minorée par une constante strictement positive, θ prend toute valeur réelle, ce qui montre que $M^{-1}(l,a)$ est une orbite de ζ .

Démonstration des lois de Kepler.

Soit $t \mapsto (q(t), p(t))$ une solution de ζ

Première loi : l'orbite de $q(t)$ est une ellipse.

Deuxième loi (loi des aires) : l'aire balayée par le segment $(0, q(t))$ entre les instants 0 et t est proportionnelle à t. Cela résulte de ce que $q \wedge \dot q = \dfrac{l}{m}$.

Troisième loi : la période T du mouvement est proportionnelle à $\alpha^{3/2}$. On écrit que $\int_0^T \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ est égal à l'aire de l'ellipse, soit $\pi\alpha\beta$, et on obtient

$$T \;=\; 2\pi\gamma^{-1/2}\alpha^{3/2} \;=\; \frac{2\pi m^3\gamma}{p_0^3} \;.$$

n° I.3.3. Autres paramétrisations (cas général).

Soit donc (l,a) un couple de vecteurs orthogonaux et non tous deux nuls. On pose

$$\overline{p_0} \;=\; m^2\gamma.(|\,l\,|^2 + |\,a\,|^2)^{-1/2} \;>\; 0$$

$$\alpha \;=\; \frac{m^2\gamma}{(\overline{p_0})^2} > 0 \;\;,\;\; \beta \;=\; \frac{|\,l\,|}{\overline{p_0}} \geq 0$$

$$e \;=\; (1\text{-}\frac{\beta^2}{\alpha^2})^{1/2} \;=\; \frac{\overline{p_0}\,|\,a\,|}{m^2\gamma} \geq 0 \;\;.$$

On distingue maintenant 3 cas.

Cas (1) : $l \neq 0$, $a \neq 0$ (cas des orbites képlériennes elliptiques non circulaires). On définit les vecteurs ε_1 et ε_2 comme au n° I.3.2 :

$$\varepsilon_1 = \frac{a}{|\,a\,|} \;,\; \varepsilon_2 = \frac{l}{|\,l\,|} \wedge \varepsilon_1$$

Cas (2) : $l \neq 0$, $a = 0$ (cas des orbites circulaires). On note $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ une base orthonormée de l'orthogonal de l dans $\mathbf{R}^3$ telle que $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \;=\; \frac{l}{|\,l\,|}$.

Cas (3) : $l = 0$, $a \neq 0$ (cas des orbites rectilignes). On pose $\varepsilon_1 \;=\; \frac{a}{|\,a\,|}$ mais ε_2 n'est pas défini.

Première paramétrisation (à l'aide de l'anomalie excentrique).

On introduit les notations suivantes :

$$q'_{l,a}(\eta) \;=\; \alpha(\cos\eta - e).\varepsilon_1 \;+\; \beta.\sin\eta.\varepsilon_2$$

$$p'_{l,a}(\eta) \;=\; \frac{(\overline{p}_0)^3}{m^2\gamma(1 - e.\cos\eta)}(-\alpha.\sin\eta.\varepsilon_1 \;+\; \beta.\cos\eta.\varepsilon_2)$$

où η parcourt l'ensemble
. $\mathbf{R}$ si $l \neq 0$
. $\mathbf{R} \backslash 2\pi \mathbf{Z}$ si $l = 0$.

Les formules ci-dessus ont bien un sens si $l = 0$ car alors $\beta = 0$.

Théorème I.2. *Un couple* $(q, p) \in P_-$ *appartient à* $M^{-1}(l, a)$ *si et seulement s'il est de la forme* $(q'_{l,a}(\eta), p'_{l,a}(\eta))$ *.* *Dans ce cas* $\overline{p}_0 = p_0(p, q)$; η *est unique mod* $2\pi \mathbf{Z}$ *et, dans la cas* (1), *appelé anomalie excentrique du point* q *.*

Démonstration.

Condition suffisante : calculs fastidieux.
Condition nécessaire.
Cas (1). On vérifie d'abord que

$$\left(\frac{(q + \alpha e.\varepsilon_1 \mid \varepsilon_1)}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{(q \mid \varepsilon_2)}{\beta}\right)^2 = 1$$

d'où l'expression de q . Pour celle de p on écrit, comme au n° I.3.2,

$$a = \frac{1}{p_0} \left(p \wedge l - \frac{m^2 \gamma}{|q|} . q\right) .$$

Cas (2). On a ici $|l| = \dfrac{m^2 \gamma}{p_0}$, $\alpha = \beta = \dfrac{m^2 \gamma}{p_0^2}$, $e = 0$.

Par ailleurs $(q \mid p) = 0$ car, dans le cas contraire, en vertu de (I.1) avec $A(q, p) = 0$, q et p seraient proportionnels et l serait nul.
Ensuite on a

$$|p|^2 - \frac{m^2 \gamma}{|q|} = 0 \qquad \text{(par (I.1))}$$

et

$$-|p|^2 + \frac{2m^2 \gamma}{|q|} = p_0^2 = \frac{m^4 \gamma^2}{|l|^2}$$

d'où

$$|q| = \frac{|l|^2}{m^2\gamma} \ , \ |p| = \frac{m^2\gamma}{|l|} \ .$$

Par suite q et p sont de la forme

$$q = \frac{|l|^2}{m^2\gamma}(\cos\eta.\varepsilon_1 + \sin\eta.\varepsilon_2)$$

$$p = \frac{m^2\gamma}{|l|}(\cos\eta'.\varepsilon_1 + \sin\eta'.\varepsilon_2) \ ;$$

enfin la relation $q \wedge p = l$ implique $\eta' = \eta + \pi/2$.

Dans ce cas q décrit le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{|l|^2}{m^2\gamma}$.

Cas (3). On a ici $\beta = 0$, $e = 1$, $a = -\frac{m^2\gamma}{p_0|q|}.q$,

Donc $q = -|q|.\varepsilon_1$ et p est de la forme $p = \mu.\varepsilon_1$. Alors

$$p_0^2 = -\mu^2 + \frac{2m^2\gamma}{|q|} \quad , \quad |q| - \frac{m^2\gamma}{p_0^2} \leq \frac{m^2\gamma}{p_0^2} \ .$$

Il existe $\eta \in \mathbf{R} \backslash 2\pi\mathbf{Z}$ tel que $|q| = \frac{m^2\gamma}{p_0^2}(1-\cos\eta)$ et ceci définit η modulo $2\pi\mathbf{Z}$ et modulo changement de signe .

Ensuite

$$\mu^2 = \frac{2m^2\gamma}{|q|} - p_0^2 = p_0^2\frac{\sin^2\eta}{(1-\cos\eta)^2} \ ;$$

la relation $p = p_{l,a}(\eta)$ impose le signe de η et on a $\mu = -p_0\frac{\sin\eta}{1-\cos\eta}$; q et p ont bien la forme voulue.

Dans ce cas q décrit

. le segment $2\,\frac{m^2\gamma}{p_0^2}\,]0,1].\ \varepsilon_1$ si $\mu > 0$

. le segment $2\,\frac{m^2\gamma}{p_0^2}\,[-1,0[.\ \varepsilon_1$ si $\mu < 0$.

Flot hamiltonien.

On a

$$\frac{\mathrm{d}q'_{l,a}(\eta)}{\mathrm{d}\eta} = \frac{m^2\gamma(1-e\cos\eta)}{p_0^3}.p'_{l,a}(\eta) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}p'_{l,a}(\eta)}{\mathrm{d}\eta} = -\frac{p_0^3}{m^2\gamma(1-e\cos\eta)^2}.q'_{l,a}(\eta) \ .$$

Il en résulte que, si η est fonction du temps, (q,p) est solution de ζ si et seulement si η satisfait l'équation différentielle (de Kepler)

$$\text{(I.6)} \qquad (1-e.\cos\eta).\dot{\eta} = \frac{p_0^3}{m^3\gamma}$$

qui entraîne, par intégration

$$\eta(t) - e.\sin\eta(t) = \frac{p_0^3}{m^2\gamma}(t-t_0) \ .$$

Dans le cas (1), $\eta - e.\sin\eta$ est appelé *anomalie moyenne* de q.
Lorsque l est non nul, l'équation (I.6) est sans singularité, les solutions maximales sont définies sur **R** tout entier, et on voit que $M^{-1}(l,a)$ est une orbite du champ de vecteurs ζ.
Par contre, dans le cas (3), l'équation (I.6) a une singularité en 0. Le temps t parcourt l'intervalle $[t_0 - \frac{m^2\gamma}{p_0^3}\pi, t_0[$ si $\mu > 0$ et l'intervalle $]t_0, t_0 + \frac{m^2\gamma}{p_0^3}\pi]$ si $\mu < 0$. Dans les deux cas, la vitesse tend vers l'infini lorsque $t \to t_0$. Ici encore $M^{-1}(l,a)$ est une orbite de ζ .

Seconde paramétrisation (à l'aide de l'anomalie moyenne).

Définition. Pour tout réel $e \in [0,1]$ on note g_e la fonction d'une variable réelle $g_e(x) = x - e.\sin x$; elle est strictement croissante et on note f_e la fonction réciproque.

Pour tout réel λ on pose

$$q''_{l,a}(\lambda) = q'_{l,a}(f_e(\lambda)) \quad , \ q''_{l,a}(\lambda) = q'_{l,a}(f_e(\lambda)) \ ;$$

λ parcourt **R** si l est non nul, **R\2**π**Z** si l est nul .

Théorème I.2bis. *Un couple* $(q,p) \in P_{-}$ *appartient à* $M^{-1}(l,a)$ *si et seulement s'il est de la forme* $(q^{"}_{l,a}(\lambda), p^{"}_{l,a}(\lambda))$. *Dans ce cas* λ *est unique modulo* $\mathbf{2\pi Z}$.

Dans le cas (1), $f_e(\lambda)$ est l'anomalie excentrique du point q , et $\lambda = f_e(\lambda) - e.\sin(f_e(\lambda))$ est son *anomalie moyenne* .

Flot hamiltonien.

On a

$$\frac{\mathrm{d}q^{"}_{l,a}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{m^2\gamma}{p_0^3}.p^{"}_{l,a}(\lambda) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}p^{"}_{l,a}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{m^4\gamma}{p_0^3\,|q|^3}.q^{"}_{l,a}(\lambda) \ .$$

Il en résulte que, si λ est fonction du temps, (q,p) est solution de ζ si et seulement si

(I.7) $$\dot{\lambda}(t) = \frac{p_0^3}{m^3\gamma} \ ;$$

le flot hamiltonien est donc donné par

$$\Gamma_t(q^{"}_{l,a}(\lambda), p^{"}_{l,a}(\lambda)) = (q^{"}_{l,a}(\lambda + \frac{p_0^3}{m^3\gamma}t), p^{"}_{l,a}(\lambda + \frac{p_0^3}{m^3\gamma}t)) \ ;$$

on notera que $\dfrac{p_0^3}{m^3\gamma}$ est une constante qui ne dépend que de l'orbite .

n° I.3.4. Récapitulatif : divers objets associés à un couple (*p*,*q*).

- Hamiltonien : $H = \dfrac{|p|^2}{2m} - \dfrac{m\gamma}{|q|}$.

On supposera $H < 0$.

- $p_0 = (-2mH)^{1/2}$.

- Moment cinétique : $l = q \wedge p \ \in \mathbf{R}^3$.

- Vecteur de Lenz : $a = \dfrac{1}{p_0}\,(p \wedge l - \dfrac{m^2\gamma}{|q|}.q) \ \in \mathbf{R}^3$.

On supposera l et a non nuls .

Périhélie : $(q_{l,a}(0), p_{l,a}(0)) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ où

$$q_{l,a}(0) = \frac{|l|^2}{|a|.(p_0|a|+m^2\gamma)}.a \quad , \quad p_{l,a}(0) = \frac{1}{|l|^2|a|}(p_0|a|+m^2\gamma).\, l \wedge a \ .$$

- Demi grand axe et demi petit axe :

$$\alpha = \frac{m^2\gamma}{p_0^2} \ , \ \beta = \frac{|l|}{p_0} \ .$$

- Excentricité : $e = \dfrac{p_0|a|}{m^2\gamma}$.

- Période $T = \dfrac{2\pi m^3\gamma}{p_0^3}$.

- Anomale vraie : $\theta = \text{angle } (q_{l,a}(0), q)$, soit encore

$$q = |q|.(\cos\theta.\frac{a}{|a|} + \sin\theta.(\frac{l}{|l|} \wedge \frac{a}{|a|}) \ .$$

- Anomalie excentrique η définie par

$$q = \alpha.(\cos\eta - e).\frac{a}{|a|} + \beta.\sin\eta.(\frac{l}{|l|} \wedge \frac{a}{|a|}) \ .$$

- Anomalie moyenne λ définie par $\eta = \lambda - e\sin\lambda$, soit encore $\lambda = \dfrac{p_0^3}{m^3\gamma}.t = \dfrac{2\pi t}{T}$ où t est le temps mis par le point mobile pour aller du périhélie au point q .

§ II. Espace fibré cotangent à la sphère S^3.

n° II.1. Généralités.

Les éléments de $\mathbf{R}^4$ seront notés $x = (x_0, \vec{x})$ avec $x_0 \in \mathbf{R}$ et $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$. On assimilera S^3 à l'ensemble des x tels que $|x| = 1$, cela permettra de définir

- . une structure riemannienne g sur $\mathbf{S}^3$,
- . un lagrangien L' sur $T(\mathbf{S}^3)$,
- . une transformation de Legendre bijective F' : $T(\mathbf{S}^3) \to T^*(\mathbf{S}^3)$,
- . un hamiltonien H' sur $T^*(\mathbf{S}^3)$.

On munira $T^*(\mathbf{S}^3)$, de la 1-forme différentielle de Liouville α' et de la 2-forme différentielle symplectique canonique ω', d'où une structure de système hamiltonien (cf. annexe A 4).

On utilisera les notations suivantes

- . $T(\mathbf{S}^3)_0 = \{(u,v) \in T(\mathbf{S}^3) \mid v \neq 0\}$,
- . $P' = T^*(\mathbf{S}^3)$,
- . $P'_0 = \{(u,w) \in P' \mid w \neq 0\}$.

Par ailleurs on identifiera $T^*(\mathbf{R}^4)$ à $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$, système hamiltonien avec des objets notés α'', ω'', H''. Pour faire les calculs, on utilisera des coordonnées locales sur la demi-sphère supérieure ouverte notée U, soit $u = (u_1, u_2, u_3)$, avec l'injection $i : U \to \mathbf{R}^4$:

$$i(u) = (x_0, \vec{x}) \quad , \vec{x} = u \quad , x_0 = (1 - |u|^2)^{1/2} \quad ;$$

comme $|u| < 1$, on a $x_0 \in]0,1]$.

Les résultats, énoncés sous forme de lemmes ou de théorèmes, seront valables sur la sphère tout entière, d'abord en changeant x_0 de signe, puis par densité et continuité. On posera

$$P'' = \{(x,y) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \mid |x| = 1, (x \mid y) = 0\}$$

$$P''_0 = \{(x,y) \in P'' \mid y \neq 0\} \quad .$$

n° II.2. Etude de $T(\mathbf{S}^3)$.

(On fait les calculs en coordonnées locales sur U)

Différentielle de l'application i :

$$\frac{\partial x_0}{\partial u_i} = -u_i(1-|u|^2)^{-1/2} \quad , \quad \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = \delta_{\mathrm{i,k}} \quad , \quad \mathrm{k}>0$$

Application J_u : $T_u(U) \to \mathbf{R}^4$: si $v = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial}{\partial u_i}$, alors

$$J_u(v) = (v \mid \frac{\partial x}{\partial u}) ,$$

d'où l'application J : $T(U) \to \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$:

$$J(u,v) = (i(u), J_u(v)) .$$

Lemme II.1. *La restriction* J_0 *de* J *à* $T(\mathbf{S}^3)_0$ *est une bijection de* $T(\mathbf{S}^3)_0$ *sur* P''_0 *avec inverse donné en coordonnées locales par* $J_0^{-1}(x,y) = (\vec{x},\vec{y})$.

Démonstration. Calcul facile.

Produit scalaire g_u **sur** $T_u(\mathbf{S}^3)$: c'est la restriction du produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^4$; en coordonnées locales

$$g_u(v,v') = \sum_{i,j} (u_i u_j (1-|u|^2)^{-1} + \delta_{i,j}).v_i v_j .$$

Lagrangien sur $T(\mathbf{S}^3)$:

$$L'(u,v) = g_u(v,v) = |v|^2 + (1-|u|^2)^{-1}(u \mid v)^2 .$$

Différentielle partielle $\frac{\partial L'}{\partial v}$: c'est la forme linéaire

$$v' \mapsto 2\sum_i (v_i v'_i + (1-|u|^2)^{-1}(u \mid v) u_i v'_i) .$$

Energie : $E'(u,v) = L'(u,v)$.

n° II.3. Etude de $\mathrm{T}^*(\mathbf{S}^3)$.

Transformation de Legendre (bijective).

$$F'(u,v) \;=\; (u,w) \text{ où } w \;=\; \frac{\partial L'}{\partial v}(u,v) \;.$$

En coordonnées locales

(II.1) $$w \;=\; 2(v+(1\text{-}|u|^2)^{-1}(u\,|\,v)u \;.$$

Lemme II.2. *L'application* F' *envoie bijectivement* $\mathrm{T}(\mathbf{S}^3)_0$ *sur* P'_0 *avec inverse donné en coordonnées locales par*

(II.2) $$F'^{-1}(u,w) \;=\; (u,\frac{1}{2}(w-(u\,|\,w)u)) \;.$$

Démonstration. Si dans (II.1) , w est nul, on a successivement

$$v \;=\; -(1-|u|^2)^{-1}(u\,|\,v)u$$

$$(u\,|\,v)(1\text{-}|u|^2) \;=\; -(u\,|\,v)|u|^2 \;,\quad (u\,|\,v) \;=\; 0 \;,\; v \;=\; 0 \;.$$

La démonstration de la réciproque est analogue .

Hamiltonien H' sur P' :

$$H'(u,w) \;=\; \frac{1}{4}(|w|^2-(u\,|\,w)^2) \;.$$

Formes différentielles sur P' :

$$\alpha' \;=\; (w\,|\,\mathrm{d}u) \quad , \quad \omega' \;=\; (\mathrm{d}w\,|\,\mathrm{d}u) \;.$$

Champ de vecteurs hamiltonien sur P' :

$$\zeta' \;=\; X_{H'}^{\omega'} \;=\; \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}(w_i-(u\,|\,w)u_i).\frac{\partial}{\partial u_i} \;+\; \frac{1}{2}(u\,|\,w)w_i.\frac{\partial}{\partial w_i} \;.$$

n° II.4. Etude de $T^*(\mathbf{R}^4)$.

Lemme II.3. *L'application* $\Lambda = J_0 \circ F'^{-1}$ *est une bijection* $P_0' \to P_0''$ *donnée en coordonnées locales par* $\Lambda(u,w) = (x,y)$ *où*

$$x_0 = (1-|u|^2)^{1/2} \quad , \quad \vec{x} = u$$

$$y_0 = -\frac{1}{2}(u\,|\,w).(1-|u|^2)^{1/2} \quad , \; \vec{y} = \frac{1}{2}(w-(u\,|\,w).u)$$

et $\Lambda^{-1}(x,y) = (u,w)$ *où*

$$u = \vec{x} \quad , \quad w = 2(\vec{y} - \frac{y_0}{x_0}.\vec{x}) \ .$$

Démonstration. Calcul facile.

On identifie $T^*(\mathbf{R}^4)$ à $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$, on le munit des formes différentielles

$$\alpha'' = (y\,|\,\mathrm{d}x) \quad , \quad \omega'' = (\mathrm{d}y\,|\,\mathrm{d}x)$$

et de l'hamiltonien $H''(x,y) = \dfrac{-1}{2|x|^2.|y|^2}$.

Champ de vecteurs associé à ω'' **et** H'' :

$$\zeta'' = X_{H''}^{\omega''} = \frac{1}{|x|^2.|y|^4}(y\,|\,\frac{\partial}{\partial x}) - \frac{1}{|x|^4.|y|^2}(x\,|\,\frac{\partial}{\partial y}) \ .$$

Flot de ζ'' :

$$\Gamma_t''(x,y) = (\cos kt.x + \frac{|x|}{|y|}\sin kt.y \ , \ -\frac{|y|}{|x|}\sin kt.x + \cos kt.y)$$

où $k = \dfrac{1}{|x|^3.|y|^3}$. Ce flot conserve P_0'' .

On utilisera aussi les difféomorphismes

(II.3) $$F_t(x,y) = (\cos t.x + \frac{|x|}{|y|}.\sin t.y \ , \ -\frac{|y|}{|x|}.\sin t.x + \cos t.y)$$

de sorte que $\Gamma''_t(x,y) \;=\; F_{k.t}(x,y)$.

Remarque. Si $(x \mid y)=0$ la première composante de $\Gamma''_t(x,y)$ décrit le grand cercle de la sphère de rayon $|x|$ situé dans le plan engendré par x et y , avec une vitesse constante égale à $\dfrac{1}{|\mathrm{x}|^2.|y|^3}$.

Théorème II.1. *Le difféomorphisme* Λ *transforme* H' (*resp.* ω', *resp.* ζ') *en la restriction de* $-\dfrac{1}{2H''}$ (*resp.* $-2\omega''$, *resp.* $|y|^4.\zeta''$) *à* P_0'' .

Démonstration. Première assertion : calcul immédiat.
Seconde assertion : il suffit de prouver que Λ^* transforme la restriction β de α'' en $-\dfrac{1}{2}\alpha'$. Or, pour $(x,y)\in P_0''$, on a

$$\Lambda^*(\beta) \;=\; \sum_{\mathrm{k}=0}^{3} y_k(u,w).\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_k}{\partial u_i}.\mathrm{d}u_i$$

puisque $\dfrac{\partial x_k}{\partial w_i} \;=\; 0$. Donc

$$\begin{aligned}\Lambda^*(\beta) \;&=\; y_0(u,w).\sum_i \frac{\partial x_0}{\partial u_i}.\mathrm{d}u_i \;+\; \sum_{k=1}^{3} y_k(u,w).\sum_i \frac{\partial x_k}{\partial u_i}.\mathrm{d}u_i \\ &=\; \frac{1}{2}(u \mid w).\sum_i u_i \mathrm{d}u_i \;+\; \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2}(w_k-(u \mid w)u_k).\mathrm{d}u_k\,.\end{aligned}$$

Troisième assertion : calcul direct ou Annexe A.2.

n° II.5. Quelques propriétés utiles de P_0'' .

On définit 3 applications L'', A'', M'' de P_0'' vers $\mathbf{R}^3$ par

$$L''(x,y)=\vec{x}\wedge\vec{y}\ ,\ A''(x,y)=y_0\vec{x}-x_0\vec{y}\ \ ,\ \ M''(x,y)=x\wedge y\ .$$

Lemme II.4. *Soit* $(x,y)\in P_0''$.

(i) *On a* $x_0^2+\dfrac{y_0^2}{|y|^2} \;\leq\; 1$ *avec égalité ssi* $L''(x,y)=0$.

(ii) *On a* $\vec{y} + A''(x,y) = 0$ *ssi* $x_0 = 1$.

Démonstration.

(i) On a

$$1 - x_0^2 - \frac{y_0^2}{|y|^2} = \frac{1}{|y|^2}(|\vec{x}|^2 .|y|^2 - y_0^2) = \frac{1}{|y|^2}(|\vec{x}|^2 .|\vec{y}|^2 - x_0^2 y_0^2 .$$

Comme $(x|y) = 0$ on a $x_0^2 y_0^2 = |\vec{x}|^2 .|\vec{y}|^2 .\cos^2(\theta)$ où θ est l'angle de $\vec{x}$ et $\vec{y}$, d'où $1 - x_0^2 - \frac{y_0^2}{|y|^2} = \frac{1}{|y|^2}|L''(x,y)|^2$.

(ii) On a $\vec{y} + A''(x,y) = (1 - x_0).\vec{y} + y_0.\vec{x}$. Si $x_0 = 1$, comme $|x| = 1$, on a

$\vec{x} = 0$, $\vec{y} + A''(x,y) = 0$.

Réciproquement supposons $\vec{y} + A''(x,y) = 0$; alors, comme $(x|y) = 0$:

$$0 = (\vec{y} + A''(x,y)|\vec{x}) = -(1 - x_0)x_0 y_0 + y_0(1 - x_0^2) = y_0(1 - x_0) \;;$$

si $x_0 \neq 1$, on a $y_0 = 0$, $\vec{y} = 0$, $y = 0$, contradiction.

Remarque. Cushman et Duisterman appellent "Delaunay hamiltonian" la fonction $H''\circ\Lambda$; le champ de vecteurs correspondant est égal à $\frac{8}{(|w|^2 - (u|w)^2)^2}.\zeta'$. On trouvera un exposé très complet des "Delaunay variables" dans Chang- Marsden, 2003.

§ III. Passage de $T^*(\mathbf{R}^3\backslash 0)$ à $T^*(\mathbf{S}^3)$ via $T^*(\mathbf{R}^4)$.

n° III.1. Généralités.

On va construire , suivant Ligon et Schaaf, un difféomorphisme de P_- sur $P'_{0,-}$, ensemble des $(u,w)\in P'_0$ tels que u soit distinct du pôle nord de la sphère, i.e. que $x_0<1$. Pour y parvenir, on construira diverses applications de P_- vers P''_0 , dont la dernière, notée $\Phi_{L,S}$ en l'honneur de Ligon et Schaaf, sera un difféomorphisme de P_- sur $P''_{0,-}$, ensemble des $(x,y)\in P''_0$ tels que $x_0<1$, et on la composera avec Λ^{-1} .

n° III.2. Application $\Phi_0 : P_- \to P''_{0,-}$.

On pose $\Phi_0(q,p) = (x,y)$ où , avec $p_0=p_0(q,p)$

(III.1) $$x_0 = \frac{|q|.|p|^2}{m^2\gamma} - 1 = \frac{|p|^2-p_0^2}{|p|^2+p_0^2}$$

(III.2) $$\vec{x} = \frac{p_0}{m^2\gamma}\ |q|.p = \frac{2p_0}{|p|^2+p_0^2}.p$$

(III.3) $$y_0 = -(q\,|\,p)$$

(III.4) $$\vec{y} = \frac{m^2\gamma}{p_0}\Big(-\frac{q}{|q|}+\frac{(q\,|\,p)}{m^2\gamma}.p\Big) = \frac{1}{p_0}\Big(-\frac{|p|^2+p_0^2}{2}.q+(q\,|\,p).p\Big)\ .$$

On vérifie facilement que

$$|x|=1\ ,\ (x\,|\,y)=0\ ,\ |y|=\frac{m^2\gamma}{p_0} > 0$$

$$1\text{-}x_0 = \frac{p_0^2}{m^2\gamma}.|q| > 0\ .$$

Théorème III.1. *L'application* Φ_0 *est une bijection de* P_- *sur* $P''_{0,-}$ *avec inverse donné par*

$$\Phi_0^{-1}(x,y) \;=\; (q,p)$$

où

$$q \;=\; -\frac{|y|}{m^2\gamma}(y_0.\vec{x}+(1-x_0).\vec{y}) \quad , \quad p \;=\; \frac{m^2\gamma}{|y|(1-x_0)}.\vec{x} \quad .$$

Démonstration. Calcul .

On notera en particulier la relation

(III.5) $$H(q,p) \;=\; -\frac{m^3\gamma^2}{2|y|^2} \;<\; 0 \;.$$

Remarque. Pour une valeur donnée de p_0,
c'est-à-dire de l'énergie, p est la projection
stéréographique de x au sens suivant :
le pôle nord de la sphère est le vecteur $(1,\vec{0})$;
le vecteur $(1-p_0,p)-(1,\vec{0})$ de $\mathbf{R}^4$ est égal à
$\frac{p_0}{1-x_0}(x-(1,\vec{0}))$.

n° III.3. Applications $\Phi_\varphi \;:\; P_- \to P_0''$.

Pour toute fonction réelle φ sur P_- on définit Φ_φ par $\Phi_\varphi(q,p) = (x,y)$ où

(III.6) $$x_0 \;=\; \frac{p_0}{m^2\gamma}.(q\,|\,p).\sin\varphi \;+\; (\frac{|q|.|p|^2}{m^2\gamma} \;-\; 1).\cos\varphi$$

(III.7) $$\vec{x} \;=\; \frac{1}{|q|}.\sin\varphi.q \;+\; \frac{1}{m^2\gamma}(-(q\,|\,p).\sin\varphi+p_0\,|q|.\cos\varphi).p$$

(III.8) $$y_0 \;=\; -(q\,|\,p).\cos\varphi \;+\; \frac{m^2\gamma}{p_0}(\frac{|q|.|p|^2}{m^2\gamma} \;-\; 1).\sin\varphi$$

(III.9) $$\vec{y} \;=\; -\frac{m^2\gamma}{p_0\,|q|}.\cos\varphi.q \;+\; (\frac{(q\,|\,p)}{p_0}.\cos\varphi+|q|.\sin\varphi).p$$

soit encore

(III.10) $$\Phi_\varphi(q,p) \;= F_{-\varphi(q,p)}(\Phi_0(q,p))$$

où F_t désigne le groupe à un paramètre de difféomorphismes défini par

(II.1) . On vérifie aisément que

$$|x|=1 \ , \ (x\,|\,y)=0 \ , \ |y|=\frac{m^2\gamma}{p_0} \ > \ 0 \ ,$$

par contre on n'a pas nécessairement $x_0<1$, Φ_φ <u>n'envoie pas toujours</u> P_- <u>dans</u> $P''_{0,-}$.

Calcul de l'image par Φ^*_φ de la 1-forme différentielle $(x\,|\,\mathrm{d}y)$ sur $\mathbf{R}^4\times\mathbf{R}^4$.

Lemme III.1. *On a*

$$\Phi^*_\varphi\,((x\,|\,\mathrm{d}y)) \ = \ (q\,|\,\mathrm{d}p) - (q\,|\,p).\frac{\mathrm{d}p_0}{p_0} \ + \ \frac{m^2\gamma}{p_0}.\mathrm{d}\varphi \ .$$

Démonstration.

a) Pour simplifier les notations, on écrira

$$x \ = \ B.\cos\varphi + A.\sin\varphi \ \ , \ y \ = \ v(B.\sin\varphi - A.\cos\varphi)$$

où

$$\varphi \ = \ \varphi(q,p) \ \ , \ \ v \ = \ \frac{m^2\gamma}{p_0}$$

$$A \ = \ (\frac{(q\,|\,p)}{v} \ , \ \frac{q}{|q|}-\frac{(q\,|\,p)}{m^2\gamma}.p \qquad , \qquad B \ = \ (\frac{|q|.|p|^2}{m^2\gamma} \ \text{-}1 \ , \ \frac{|q|}{v}.p)$$

On a

$$|A| \ = \ |B| \ = \ 1 \ , \ (A\,|\,B) \ = \ 0$$

d'où

$$(A\,|\,\mathrm{d}A)=(B\,|\,\mathrm{d}B)=(A\,|\,\mathrm{d}B)+(B\,|\,\mathrm{d}A)=0 \ .$$

b) On vérifie successivement les égalités

$$(x\,|\,\mathrm{d}y) \ = \ v((A\,|\,\mathrm{d}B)+\mathrm{d}\varphi)$$

$$\mathrm{d}B_0 \;=\; \frac{1}{m^2\gamma}.(|\,p\,|^2\,.\mathrm{d}(|\,q\,|) + |\,q\,|.\mathrm{d}(|\,p\,|^2))$$

$$\mathrm{d}\vec{B} \;=\; \frac{1}{v}.((\mathrm{d}(|\,q\,|) - |\,q\,|.\frac{\mathrm{d}v}{v}).p \;+\; |\,q\,|.\mathrm{d}p)$$

$$v.(A\,|\,\mathrm{d}B) \;=\; (q\,|\,\mathrm{d}p) + (q\,|\,p).\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

d'où résulte le lemme.

n° III.4. Application $\Phi_{LS} \;:\; P_- \to P''_{0,-}$.

On prend pour φ la fonction

$$\varphi_{LS}(q,p) \;=\; \frac{p_0}{m^2\gamma}(q\,|\,p)$$

Lemme III.2. *L'application* Φ_{LS} *envoie* P_- *dans* $P''_{0,-}$.

Démonstration. On définit (x,y) par (III.6) ,…, (III.9) avec $\varphi = \varphi_{LS}$. Supposons $x_0 = 1$; comme $|\,x\,| = 1$ et $(x\,|\,y) = 0$, on a $\vec{x} = 0$ et $y_0 = 0$; donc

$$\frac{p_0}{m^2\gamma}.(q\,|\,p).\sin\varphi \;+\; (\frac{|\,q\,|.|\,p\,|^2}{m^2\gamma}\text{ -1}).\cos\varphi \;=\; 1$$

$$-(q\,|\,p).\cos\varphi \;+\; \frac{m^2\gamma}{p_0}.\,(\frac{|\,q\,|.|\,p\,|^2}{m^2\gamma}\text{ -1}).\sin\varphi \;=\; 0$$

soit encore

$$\varphi.\sin\varphi \;+\; (\frac{|\,q\,|.|\,p\,|^2}{m^2\gamma}\text{ -1}).\cos\varphi \;=\; 1$$

$$-\varphi.\cos\varphi \;+\; (\frac{|\,q\,|.|\,p\,|^2}{m^2\gamma}\text{ -1}).\sin\varphi \;=\; 0$$

d'où résulte successivement

$$\varphi = \sin\varphi \;\;,\;\; \varphi{=}0 \;\;,\;\; \frac{|\,q\,|.|\,p\,|^2}{m^2\gamma} = 2 \;\;,\;\; \frac{2}{m\gamma}|\,q\,|.H(q,p) = 0 \;\;,$$

contradiction.

Lemme III.3. *On a*

$$L''\circ\Phi_0 = L''\circ\Phi_{LS} = L \ , \ A''\circ\Phi_0 = A''\circ\Phi_{LS} = A \ , \ M''\circ\Phi_0 = M''\circ\Phi_{LS} = M \ .$$

Démonstration. Calcul facile.

n° III.5. Construction d'un inverse pour Φ_{LS} .

On écrira φ pour φ_{LS} *et* Φ *pour* Φ_{LS} . On sait (formule (III.10)) que

$$\Phi(q,p) = F_{-\varphi(q,p)}(\Phi_0(q,p)) \ .$$

Pour toute fonction réelle ψ sur $P''_{0,-}$, on définira une application $\Psi_\psi : P''_{0,-} \to P_-$ par

$$\Psi_\psi(x,y) = \Phi_0^{-1}(F_{-\psi(x,y)}(x,y)) \quad ;$$

on construira ψ de façon que

(III.11) $$\psi\circ\Phi_{LS} = -\varphi \quad et \quad \varphi\circ\Psi_\psi = -\psi \ ;$$

on aura alors facilement le

Théorème III.2. *L'application* Φ_{LS} *est une bijection* $P_- \to P''_{0,-}$ *avec inverse* Ψ_ψ .

Lemme III.4. *On désigne par* a *et* b *deux nombres réels satisfaisant*

$$a^2 + b^2 \leq 1 \ ,$$

(i) *Il existe un unique réel* h *tel que*

(III.12) $$h - a.\sin h - b.\cos h = 0 \ .$$

On le notera $h(a,b)$ *; il vérifie* $|h(a,b)| \leq (a^2+b^2)^{1/2}$.
(ii) *Sur le disque ouvert* $a^2+b^2 < 1$ *, la fonction* h *est différentiable et on a*

$$\frac{\partial h}{\partial a} = \frac{\sin h}{1 - a.\cos h + b.\sin h} \ , \ \frac{\partial h}{\partial b} = \frac{\cos h}{1 - a.\cos h + b.\sin h} \ .$$

(iii) *Soit* (a_n,b_n) *une suite convergeant vers* (1,0). *Alors* $h(a_n,b_n)$ *tend vers* 0.

Démonstration.

(i) Posons $k=(a^2+b^2)^{1/2}$; il existe un unique réel y tel que

$$\sin y=\frac{a}{k}\ ,\ \cos y=\frac{b}{k}\quad ;$$

(III.12) équivaut à $h=k.\cos(h-y)$. La suite consiste à comparer les graphes des fonctions h et $k.\cos(h-y)$. Enfin ou remarque que, pour tout h, on a

$$|a.\sin\ h+b.\cos\ h|\ \leq\ (a^2+b^2)^{1/2}\ .$$

(ii) On peut invoquer le théorème des fonctions implicites puisque $|a.\text{sinh}+b.\text{cosh}|<1$.

(iii) Supposons le contraire ; remplaçant la suite donnée par une sous-suite, on peut supposer que $h(a_n,b_n)$ tend vers un nombre α non nul ; passant à la limite dans (III.12), on obtient $\alpha-\sin\alpha=0$, $\alpha=0$, contradiction.

Définition. Grâce aux lemmes II.4 et III.4, on peut poser $\psi(x,y)\ =\ h(x_0,\frac{y_0}{|y|})$

Lemme III.5. *Les relations* (III.11) *sont satisfaites.*

Démonstration.

On vérifie facilement que, pour $(q,p)\in P_-$ et $(x,y)=\Phi(q,p)$ on a

$$\varphi(q,p)\ =\ -h(x_0,\frac{y_0}{|y|})\quad\text{et}\quad\psi(\Phi(q,p))\ =\ -\varphi(q,p)\ ,$$

d'où

$$\Psi_\psi\circ\Phi\ =\ \text{id}_{P_-}\ ,\ \varphi\circ\Psi_\psi\circ\Phi\ =\ \varphi\ =\ -\psi\circ\Phi\ ,$$

et, comme Φ est injectif, $\varphi\circ\Psi_\psi\ =\ -\ \psi$.

n° III.6. Transport de formes différentielles.

Théorème III.3. *On rappelle que* Φ_0 *et* Φ_{LS} *sont des bijections* $P_- \to P''_{0,-}$.

(i) Φ_0 *transforme* ω (*resp.* H) *en la restriction de* $\omega'' + \frac{1}{m^2\gamma}.\frac{\mathrm{d}\,|\,y\,|}{|\,y\,|}\wedge \mathrm{d}y_0$ (*resp.* $m^3\gamma^2 H''$) *à* $P''_{0,-}$.

(ii) Φ_{LS} *transforme* ω (*resp.* H) *en la restriction de* ω'' (*resp.* $\frac{H''}{m^3\gamma^2}$) *à* $P''_{0,-}$.

Démonstration.

Assertions relatives à H : calcul facile.
Assertion (i) relative à ω : le lemme III.1 donne

$$\Phi_0^*((x\,|\,\mathrm{d}y)) = (q\,|\,\mathrm{d}p) - (q\,|\,p).\frac{\mathrm{d}p_0}{p_0}$$

$$\Phi_0^*((\mathrm{d}x\,|\,\mathrm{d}y)) = (\mathrm{d}q\,|\,\mathrm{d}p) - \frac{1}{p_0}\mathrm{d}((q\,|\,p))\wedge \mathrm{d}p_0$$

$$\Phi_0^*(\omega'') = \omega + \frac{1}{p_0}\mathrm{d}((q\,|\,p))\wedge \mathrm{d}p_0 \quad .$$

Les formules du n° III.1 donnent

$$\Phi_0^*(|\,y\,|) = \frac{m^2\gamma}{p_0} \quad , \quad \Phi_0^*(\log|\,y\,|) = -\,m^2\gamma.\log p_0 \quad ,$$

$$\Phi_0^*\left(\frac{\mathrm{d}\,|\,y\,|}{|\,y\,|}\right) = -\,\frac{m^2\gamma}{p_0}\ \mathrm{d}p_0$$

$$\Phi_0^*(y_0) = -(q\,|\,p) \quad , \quad \Phi_0^*(\mathrm{d}y_0) = -\,\mathrm{d}(q\,|\,p)$$

d'où enfin

$$\Phi_0^*\left(\omega'' + \frac{1}{m^2\gamma}.\frac{\mathrm{d}\,|\,y\,|}{|\,y\,|}\wedge \mathrm{d}y_0\right) = \omega \quad .$$

Assertion (ii) relative à ω : résulte du lemme III.1 et de ce que

$$\mathrm{d}\varphi_{LS} \; = \; \frac{1}{m^2\gamma}(q\,|\,\mathrm{d}p).\mathrm{d}p_0 \; + \; \frac{p_0}{m^2\gamma}.\mathrm{d}((q\,|\,p)) \; ,$$

Remarque. On voit ici un premier avantage de Φ_{LS} par rapport à Φ_0 : <u>celle-ci ne transforme pas</u> ω en la restriction de ω'' *à* $P''_{0,-}$.

n° III.7. Unicité de la fonction φ_{LS} .

Théorème III.4. *La fonction* φ_{LS} *est l'unique fonction réelle* φ *sur* P_- *possédant les propriétés suivantes* :
(i) $\Phi_\varphi(P_-) \subset P''_{0,-}$
(ii) $\Phi^*_\varphi(\omega'') = \omega$.

Démonstration.

a) On a, pour toute fonction φ ,

$$\omega \; = \; \mathrm{d}\alpha \; , \; \omega'' = \mathrm{d}\alpha'' \quad \text{(cf. n° I.1 et II.4)}$$

$$\Phi^*_\varphi((x\,|\,\mathrm{d}y)) \; = \; (q\,|\,\mathrm{d}p) - (q\,|\,p).\frac{\mathrm{d}p_0}{p_0} + \frac{m^2\gamma}{p_0}.\mathrm{d}\varphi \quad \text{(cf. lemme III.1)}$$

donc

$$\Phi^*_\varphi(\omega'') \; = \; \omega + \frac{1}{p_0^2}.\,\mathrm{d}p_0 \; \wedge \; (-p_0.\mathrm{d}((q\,|\,p)) + m^2\gamma.\mathrm{d}\varphi) \; ,$$

et par suite

$$\Phi^*_\varphi(\omega'') \; = \; \omega \;\; \text{si et seulement si} \;\; \mathrm{d}p_0 \; \wedge \; (-p_0.\mathrm{d}((q\,|\,p)) + m^2\gamma.\mathrm{d}\varphi = 0 \, .$$

Posons $\psi = \varphi - \varphi_{LS}$; on a (théorème III.3)

$$m^2\gamma.\mathrm{d}\varphi_{LS} \; = \; (q\,|\,p).\mathrm{d}p_0 + p_0.\mathrm{d}((q\,|\,p))$$

donc

$$\Phi^*_\varphi(\omega'') \; = \; \omega \;\; \text{si et seulement si} \;\; \mathrm{d}p_0 \wedge \mathrm{d}\varphi = 0 \; ,$$

ce qui signifie que la fonction ψ est localement constante sur chaque surface d'énergie notée $(P_-)_h = p_0^{-1}(h)$, $h > 0$, et même constante puisque cette surface est connexe.

b) On va maintenant montrer que, si la valeur ψ_h prise par ψ sur $(P_-)_h$ est non nulle, $\Phi_\varphi((P_-)_h$ n'est pas inclus dans l'ensemble $(P_{0,-}^{"})_h$ des $(x,y)\in P_{0,-}^{"}$ tels que $|y|=\dfrac{m^2\gamma}{h}$. On vérifie (calcul direct) que, pour $(q,p)\in(P_-)_h$, on a

$\Phi_\varphi(q,p)=F_{\psi_h}(\Phi_{\varphi_{LS}}(q,p))$; $\Phi_{\varphi_{LS}}$ envoie bijectivement $(P_-)_h$ sur $(P_{0,-}^{"})_h$ et il suffit de montrer que, si t est un réel non nul modulo 2π , F_t n'envoie pas l'ensemble $(P_{0,-}^{"})_h$ dans lui-même. Or F_t envoie bijectivement $(P_0^{"})_h$ sur lui-même avec inverse F_{-t} ; et on voit immédiatement que , si $(x,y)\in(P_0^{"})_h$ et $x_0=1$, $F_{-t}(x,y)\in(P_{0,-}^{"})_h$.

Remarque. Cushman et Duistermaat déduisent de ce résultat que $\Phi_{\varphi_{LS}}$ est l'unique application $\Phi : P_- \to P_{0,-}^{"}$ ayant les propriétés suivantes :

(i) $M"\circ\Phi=M$

(ii) $\Phi^*(\omega")=\omega$.

n° III.8. Transport de champs de vecteurs et de flots .

Théorème III.5.

(i) Φ_0 *transforme les équations du mouvement du problème de Kepler en les équations*

$$\dot x = \frac{m^3\gamma^2}{|x|^2\,|y|^4\,(1-x_0)}.y \ , \ \dot y = -\frac{m^3\gamma^2}{|x|^4|y|^2\,(1-x_0)}.x \ .$$

(ii) Φ_0 *transforme le champ de vecteurs* ζ *du problème de Kepler en la restriction à* $P_{0,-}^{"}$ *du champ de vecteurs*

$$\frac{m^3\gamma^2}{|x|^2\,|y|^4\,(1-x_0)}.(y|\frac{\partial}{\partial x}) - \frac{m^3\gamma^2}{|x|^4|y|^2\,(1-x_0)}.(x|\frac{\partial}{\partial y}) \ .$$

(L'assertion (iii) relative aux flots sera énoncée et démontrée plus loin)

(i)' Φ_{LS} *transforme les équations du mouvement du problème de Kepler en les équations*

$$\dot{X} = \frac{m^3\gamma^2}{|X|^2\,|Y|^4}.Y \quad , \quad \dot{Y} = -\frac{m^3\gamma^2}{|X|^4|Y|^2}.X$$

(ii)' Φ_{LS} *transforme le champ de vecteurs* ζ *en la restriction à* $P''_{0,-}$ *du champ de vecteurs*

$$\frac{m^3\gamma^2}{|X|^2\,|Y|^4}.(Y\,|\frac{\partial}{\partial X}) \;-\; \frac{m^3\gamma^2}{|X|^4|Y|^2}.(X\,|\frac{\partial}{\partial Y}) \quad .$$

(iii)' Φ_{LS} *transforme le flot* Γ *en la restriction à* $P''_{0,-}$ *du flot* $(X,Y) \to F_{\lambda t}(X,Y)$

où $\lambda = \dfrac{m^3\gamma^2}{|X|^3\,|Y|^3}$.

Démonstration.

(i) : calcul en tenant compte de ce que $|x|=1$.
(ii) : conséquences de (i).
Pour la suite, on a posé $(x,y) = \Phi_0(q,p)$; on a $\varphi_{LS}(q,p) = \dfrac{y_0}{|y|}$; on a posé

$$\begin{aligned}(X,Y) &= \Phi_{LS}(q,p)\\ &= (\cos\frac{y_0}{|y|}.x + \frac{|x|}{|y|}\sin\frac{y_0}{|y|}.y \;,\; -\frac{|y|}{|x|}\sin\frac{y_0}{|y|}.x + \cos\frac{y_0}{|y|}.y) \quad .\end{aligned}$$

(i)' : on calcule $\dot{X}$ et $\dot{Y}$ en tenant compte de (i) et de ce que $|y|$ est constant.
(ii)' et (iii)' : conséquences de (i)'.

Enfin on donnera au théorème III.8 une autre démonstration de l'assertion (iii)'.

Remarque. Second avantage de Φ_{LS} par rapport à Φ_0 : <u>pour</u> Φ_{LS} <u>mais pas pour</u> Φ_0 , $|\dot{x}|$ et $|\dot{y}|$ sont constants au cours du mouvement .

Calcul de l'image par Φ_0 du flot Γ .

C'est le flot Ψ du champ de vecteurs

$$\theta = \frac{m^3\gamma^2}{|x|^2|y|^4\,(1-x_0)}.(y\,|\frac{\partial}{\partial x}) \;-\; \frac{m^3\gamma^2}{|x|^4|y|^2\,(1-x_0)}.(x\,|\frac{\partial}{\partial y}) \quad .$$

On note Φ le flot du champ de vecteurs

$$\eta \;=\; \frac{m^3\gamma^2}{|x|^2|y|^4}.(y|\frac{\partial}{\partial x}) \;-\; \frac{m^3\gamma^2}{|x|^4|y|^2}.(x|\frac{\partial}{\partial y}),$$

i.e.

$$\Phi(t;x,y) \;=\; (\cos\mu t.x+\frac{|x|}{|y|}.\sin\mu t.y\;,\; -\frac{|y|}{|x|}.\sin\mu t.x+\cos\mu t.y)$$

où $\mu = \dfrac{m^3\gamma^2}{|x|^3|y|^3}$. On pose

$$g(x,y)=1-x_0 \;\;,\;\; u_{x,y}(t)=\int_0^t g(\Phi(s;x,y)).ds \;.$$

La fonction $u_{x,y}$ est strictement croissante car

$$u'_{x,y}(t)=1-\cos\mu t.x_0-\frac{|x|}{|y|}.\sin\mu t.y_0$$

qui est ≥ 0 et nulle seulement en des points isolés. On note $v_{x,y}$ la fonction réciproque.

Théorème III.5.(iii)**.** *On a*

$$\Psi(t;x,y) \;=\; \Phi(v_{x,y}(t);x,y) \;.$$

Démonstration. Définissant Ψ par cette formule, on doit vérifier que

(a) $\Psi(0;x,y) \;=\; (x,y)$, ce qui résulte de ce que $u_{x,y}(0)=0=v_{x,y}(0)$;

(b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(t;x,y)=\theta_{\Psi(t;x,y)}$. Or on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(t;x,y) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(v_{x,y}(t);x,y).v'_{x,y}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(v_{x,y}(t);x,y)=\eta_{\Psi(t;x,y)} \quad , \; u'_{x,y}(t)=g(\Phi(t;x,y))$$

$$v'_{x,y}(t)=(u'_{x,y}(v_{x,y}(t)))^{-1} \;=\; g(\Psi(t;x,y))^{-1}$$

d’où le résultat.

n° III.9. Compactification des surfaces d'énergie.

n° III.9.1. Généralités.

On note
. r un nombre réel >0
. P_r l'ensemble des $(q,p) \in P_-$ tels que $p_0(q,p) = r$
. $P_r^{"}$ l'ensemble des $(x,y) \in P"$ tels que $| y | = \dfrac{m^2\gamma}{r}$; c'est un compactifié de $\Phi_{LS}(P_r)$
. (X,Y) un élément de $P_r^{"}$ tel que $X_0 = 1$ et donc $\vec{X} = 0$, $Y_0 = 0$, $| \vec{Y} | = \dfrac{m^2\gamma}{r}$.

On va étudier
(i) les suites $(x(n), y(n)) \in P_r^{"} \cap P_{0,-}^{"}$ convergeant vers (X,Y).
(ii) les suites $(q(n), p(n)) \in P_r$ telles que $\Phi_{LS}((q(n), p(n)))$ converge vers (X,Y).
On utilisera les notations $L", A"$ définies au n° II.4.

n° III.9.2. Suites de $P_r^{"} \cap P_{0,-}^{"}$ convergeant vers (X,Y) .

Théorème III.6. *Une suite $(x(n), y(n)) \in P_r^{"} \cap P_{0,-}^{"}$ converge vers (X,Y) si et seulement si $x(n)_0 \to 1$ et $A"(x(n), y(n)) \to -\vec{Y}$. Mais $\dfrac{\overrightarrow{x(n)}}{| \overrightarrow{x(n)} |}$ n'admet pas nécessairement de limite* **.**

Démonstration.

a) Supposons $(x(n), y(n)) \to (X,Y)$. Alors

$$x(n)_0 \to 1 \text{ , } \overrightarrow{x(n)} \to 0 \text{ , } y(n)_0 \to 0 \text{ , } \overrightarrow{y(n)} \to \vec{Y} \text{ ,}$$

d'où $A"(x(n), y(n)) \to -\vec{Y}$.

b) Réciproquement supposons $x(n)_0 \to 1$ et $A"(x(n), y(n)) \to -\vec{Y}$; alors $\overrightarrow{x(n)} \to 0$; les relations $(x(n) | y(n)) = 0$ et $| \overrightarrow{y(n)} | \leq | y(n) | = | Y |$ impliquent $y(n)_0 \to 0$; enfin

$$\overrightarrow{y(n)} = \frac{1}{x(n)_0} \left(y(n)_0 . \overrightarrow{x(n)} - A"(x(n), y(n)) \right) \to \vec{Y} .$$

c) Exemple où $\frac{\overrightarrow{x(n)}}{|\overrightarrow{x(n)}|}$ n'admet pas de limite. On note ε_n , θ_n deux suites de nombres réels tels que $\varepsilon_n \to 0$, $\cos\theta_n > 0$, et u_n une suite de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ telle que $|u_n| = 1$, $\text{angle}(u_n, \vec{Y}) = \theta_n$. On pose

$$\eta_n = \frac{(\varepsilon_n(2-\varepsilon_n))^{1/2}.\cos\theta_n}{((1-\varepsilon_n)^2 + \varepsilon_n(2-\varepsilon_n).\cos^2\theta_n)^{1/2}}$$

$$x(n)_0 = 1-\varepsilon_n \ , \ \overrightarrow{x(n)} = (1-x(n)_0^2)^{1/2}.u_n$$

$$y(n)_0 = -\eta_n.|Y| \ , \ \overrightarrow{y(n)} = (1-\eta_n^2)^{1/2}.\vec{Y} \ .$$

Alors

$$\eta_n \to 0 \ , \ |x(n)| \to 1 \ , \ x(n)_0 < 1 \ , \ x(n)_0 \to 1 \ ,$$

$$|y(n)| = |Y| \ , \ (x(n)\,|\,y(n)) = 0 \ , \ y(n) \to Y \ ,$$

mais $\frac{\overrightarrow{x(n)}}{|\overrightarrow{x(n)}|}$, égal à u_n qui est soumis à la seule condition $(u_n\,|\,\vec{Y}) > 0$, n'admet pas de limite.

n° III.9.3. Suites de P_r dont l'image par Φ_{LS} converge vers (X,Y) .

Soit $(x(n), y(n)) = \Phi_{LS}(q(n), p(n))$ avec $(q(n), p(n)) \in P_r$. On sait (n° III.5) que

$$(q(n), p(n)) = \Phi_0^{-1}(F_{t_n}(x(n), y(n)))$$

où

$$t_n = -h(x(n)_0, \frac{y(n)_0}{|y(n)|}) \quad . \qquad \text{(III.13)}$$

On posera

$$(x(n)', y(n)') = F_{t_n}(x(n), y(n))$$

soit

$$x(n)' = \cos t_n.x(n) + \frac{1}{|Y|}.\sin t_n.y(n)$$

$$y(n)' = \text{-}|Y|.\sin t_n.x(n) + \cos t_n.y(n) \ .$$

Théorème III.7. *La suite* $\Phi_{LS}(q(n),p(n))$ *converge vers* (X,Y) *si et seulement si* $q(n)\to 0$ *et* $A(q(n),p(n))\to -\vec{Y}$ **.** *Dans ce cas* $|p(n)|\to +\infty$ *mais* $\dfrac{q(n)}{|q(n)|}$ *et* $\dfrac{p(n)}{|p(n)|}$ *n'ont pas nécessairement de limite .*

Démonstration .

a) Supposons $(x(n),y(n))\to(X,Y)$. Par le lemme III.4, $t_n\to 0$ donc $(x(n)',y(n)')\ \to\ (X,Y)$. Par le théorème III.1 on a

$$q(n)\ =\ -\frac{1}{r}\ (y(n)_0^{'}.\overrightarrow{x(n)}'\ +\ (1-x(n)_0^{'}).\overrightarrow{y(n)}')$$

donc $q(n)\to 0$. Puis, par le lemme III.3, $A(q(n),p(n))=A''(x(n),y(n))$ qui tend vers $-\vec{Y}$. Enfin $|p(n)|\to +\infty$ puisque

(III.14) $$\frac{|p(n)|^2}{2m}-\frac{m\gamma}{|q(n)|}=H(q(n),p(n))\ =\ -\frac{r^2}{2m}\ .$$

b) Réciproquement supposons $q(n)\to 0$ et $A(q(n),p(n))\to -\vec{Y}$; alors $A''(q(n),p(n))\to -\vec{Y}$. Par ailleurs (III.14) implique

$$|q(n|.|p(n)|^2\to 2m^2\gamma\ ,\ (q(n|p(n)\to 0\ \ ,\quad \varphi_{LS}(q(n),p(n))\to 0$$

Par (III.6), $x(n)_0\to 1$ et donc $\Phi_{LS}(q(n),p(n))\to(X,Y)$.

c) Exemple où $\dfrac{q(n)}{|q(n)|}$ et $\dfrac{p(n)}{|p(n)|}$ n'ont pas de limite. Puisque $(x(n)',y(n)')\to(X,Y)$, on peut définir $(x(n)',y(n)')$ par les formules qui définissaient $(x(n),y(n))$ au théorème III.5 ; utilisant le théorème III.1 on obtient

$$\frac{q(n)}{|q(n)|}\ =\ -\frac{r}{m^2\gamma}.[\eta_n.|Y|.\varepsilon_n^{-1/2}(2-\varepsilon_n)^{1/2}.u_n\ +\ (1-\eta_n^2)^{1/2}.\vec{Y}]\ ;$$

le second terme du crochet tend vers $\vec{Y}$, mais le premier n'a aucune limite.
De même, par le théorème III.1, $\dfrac{p(n)}{|p(n)|}\ =\ \dfrac{\overrightarrow{x(n)}'}{|\overrightarrow{x(n)}'|}$ qui n'a pas de limite.

n° III.10. Autres descriptions des applications Φ_0 et Φ_{LS} .

n° III.10.1. Généralités.

On va utiliser les deux paramétrisations de P_{-} décrites au n° I.3.3, à savoir

$$q'_{l,a}(\eta) \;=\; \alpha(\cos\eta - e).\varepsilon_1 \;+\; \beta.\sin\eta.\varepsilon_2$$

$$p'_{l,a}(\eta) \;=\; \frac{(p'_0)^3}{m^2\gamma(1-e.\cos\eta)}(-\alpha.\sin\eta.\varepsilon_1 \;+\; \beta.\cos\eta.\varepsilon_2)$$

$$q''_{l,a}(\lambda) \;=\; q'_{l,a}(f_e(\lambda))$$

$$p''_{l,a}(\lambda) \;=\; p'_{l,a}(f_e(\lambda))$$

où η et λ désignent respectivement les anomalies excentrique et moyenne du point considéré. Notons les relations suivantes, utiles dans les calculs : si $(q,p)=(q'_{l,a}(\eta),p'_{l,a}(\eta))$ on a

$$|q|=\frac{m^2\gamma}{p_0^2}(1-e.\cos\eta)\ ,\ (q\,|\,p)=\frac{m^2\gamma e}{p_0}.\sin\eta\ \ ,\ \frac{|q|.|p|^2}{m^2\gamma}-1=e.\cos\eta\ .$$

n° III.10.2. Descriptions de Φ_0 et Φ_{LS} .

Théorème III.8.
(i) *Posons* $(x,y) \;=\; \Phi_0(q'_{l,a}(\eta),p'_{l,a}(\eta))$. *On a*

$$x_0 = e.\cos\eta\ \ ,\ \vec{x}=\frac{1}{p_0}(1-e.\cos\eta).p$$

$$y_0=-\frac{m^2\gamma}{p_0}.\sin\eta\ \ ,\ \vec{y}=-p_0.q-\frac{m^2\gamma e}{p_0}.\varepsilon_1\ .$$

(ii) *On a* $F_t\circ\Phi_0=\Phi_0\circ G_t$ *où* F_t *et* G_t *sont les groupes de difféomorphismes définis respectivement par* (II.3) *et par*

$$G_t(q'_{l,a}(\eta)\,,p'_{l,a}(\eta)) \;=\; (q'_{l,a}(\eta+t)\,,p'_{l,a}(\eta+t))\ .$$

Démonstration. Calcul.

Théorème III.9. *On a les relations suivantes* :

(i) $$\Phi_{LS}(q'_{l,a}(\eta)\,,p'_{l,a}(\eta)) \;=\; \Phi_0(q'_{l,a}(\eta-e.\sin\eta)\,,p'_{l,a}(\eta-e.\sin\eta))$$

(ii) $\Phi_{LS}(q''_{l,a}(\lambda)\,,p''_{l,a}(\lambda)) \;=\; \Phi_0(q'_{l,a}(\lambda)\,,p'_{l,a}(\lambda))$

(iii) $\Phi_{LS}\circ\Gamma_t = J_t\circ\Phi_{LS}$ *où* J_t *est défini par* $J_t(x,y)=F_{\lambda t}(x,y)$ *avec* $\lambda = \dfrac{m^3\gamma^2}{|x|^3|y|^3}$ (cf. théorème III.5.(iii)') .

Démonstration.
(i) résulte de ce que $\Phi_{LS}(q,p) \;=\; F_{-\varphi_{LS}(q,p)}(\Phi_0(q,p))$ et $\varphi_{LS}(q,p) \;=\; e.\sin\eta$.
(ii) résulte de la définition même de $q''_{l,a}(\lambda)$ et $p''_{l,a}(\lambda)$.
(iii) résulte de (ii) et du théorème III.7.(ii) .

Remarque. L'assertion (i) signifie que l'image par Φ_{LS} d'un point (q,p) est l'image par Φ_0 du point de la même orbite dont l'anomalie excentrique est égale à l'anomalie moyenne de (q,p) . On peut dire aussi, de façon imagée, que, dans la définition de Φ_{LS} donnée au théorème III.8.(i), on fait agir le temps <u>avant</u> de faire la transformation Φ_0, tandis que, dans la définition donnée au n° III.4, on le fait agir <u>après</u>.

n° III.10.3. Description de Φ_{LS}^{-1} .

Soit $(x,y)\in P''_{0,-}$; posons $l=L''(x,y)$, $a=A''(x,y)$, $(q,p)=\Phi_{LS}^{-1}(x,y)$.

Théorème III.10.

(i) *On a*

$$q \;=\; -\frac{|y|}{m^2\gamma}.(\vec{y}+a) \;\;,\;\; p = \frac{m^2\gamma}{|y|(1-x_0)}.\vec{x} \;.$$

(ii) *Si* a *est non nul, l'anomalie moyenne* λ *de* q *est donnée par*

$$\sin\lambda = -\frac{y_0}{|a|} \;\;,\;\; \cos\lambda = \frac{|y|\,x_0}{|a|} \;.$$

Démonstration. Par le lemme II.4, $\vec{y}+a\neq 0$. Supposons d'abord $a\neq 0$; alors les théorèmes III.7 et III.8 donnent les valeurs de $\sin\lambda$ et $\cos\lambda$ sachant que

$e = \frac{p_0 \,|\, a \,|}{m^2 \gamma}$, puis la valeur de (q, p) . Si maintenant $a = 0$, alors $e = 0$ et le théorème III.7 donne la valeur de (q, p) .

n° III.10.4. Description d'orbites dans $P''_{0,-}$ et dans P_- .

Reprenant les notations du théorème III.9, on pose

$$(x(t), y(t)) = J_t(x, y)$$

$$(q(t), p(t)) = \Phi_{LS}^{-1}(x(t), y(t)) = \Gamma_t(q, p) \ .$$

Il existe un t tel que $x(t)_0 = 1$ si et seulement si $L''(x, y) = 0$; en effet le maximum de la fonction $x(t)_0^2$ est égal à $x_0^2 + \frac{y_0^2}{|\, y \,|^2}$, lequel est égal à 1 si et seulement si $L''(x, y) = 0$ (cf. lemme II.4) ; de plus, si $x(t)_0 = -1$, alors $x(t + \frac{\pi}{\lambda})_0 = 1$.

Orbite de $(x(t), y(t))$: $x(t)$ décrit le cercle C de centre 0, de rayon 1 situé dans le plan $P = \mathbf{R}.\, x \oplus \mathbf{R}.\, y$; $y(t)$ décrit le cercle $|\, y \,|.C$.

Distinguons 3 cas :

a) $L''(x, y) \neq 0$, $A''(x, y) \neq 0$. Le plan P n'est ni vertical, ni horizontal, l'orbite O de $q(t)$ est une ellipse non circulaire.

b) $L''(x, y) \neq 0$, $A''(x, y) = 0$. Le plan P est horizontal, O est un cercle.

c) $L''(x, y) = 0$, $A''(x, y) \neq 0$. Le plan P est vertical, O est un segment de droite, $q(t)$ tend vers 0 avec une vitesse infinie lorsque $x(t)_0$ tend vers 1 .

§ IV. Action des groupes SO(3) et SO(4) et de leurs algèbres de Lie.

n° IV.1. Actions des groupes.

Le groupe Γ = SO(3) opère sur P par $\gamma.(q,p)=(\gamma.q,\gamma.p)$. Le groupe G = SO(4) opère sur P'' par $g.(x,y)=(g.x,g.y)$ en conservant H'' et ω'' mais non $P''_{0,-}$: le stabilisateur du point (1,0,0,0) est SO(3) considéré comme sous-groupe de SO(4) par l'application

$$\gamma \;\to\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} ;$$

Γ opère donc sur P'' et on a $\gamma \circ \Phi_{LS} = \Phi_{LS} \circ \gamma$.

n° IV.2. Moments canoniques.

L'algèbre de Lie o(4) opère sur $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$, sur $P''_{0,-}$ par restriction, et sur P_- via Φ_{LS} .

Théorème IV.1. (i) *Le moment canonique de l'action de* o(4) *sur* $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ *s'identifie à l'application* M'' *si l'on définit comme suit la dualité entre* o(4) *et* $\Lambda^2\mathbf{R}^4$: *pour* $\xi=(\xi_{i,j})_{i\neq j} \in$ o(4) *et* $u=(u_{i,j})_{i<j} \in \Lambda^2\mathbf{R}^4$, $\langle \xi,u\rangle = -\sum_{i<j}\xi_{i,j}u_{i,j}$.

(ii) *Le moment canonique de l'action de* o(4) *sur* P_- *s'identifie à l'application* M .

(iii) *Le moment canonique de l'action de* o(3) *sur* P_- *s'identifie à l'application* L .

Démonstration. (i) Ce moment canonique est l'application J de $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ dans o(4)* définie par

$$\langle \xi, J(x,y)\rangle = \langle y,\xi.x\rangle = -\sum_{i<j}\xi_{i,j}(x_iy_j - x_jy_i) = \langle \xi, M''(x,y)\rangle .$$

(ii) et (iii) en résultent immédiatement.

n° IV.3. Crochets de Poisson .

Théorème IV.2. *On a*

(i) $$\left\{M''_{i,j},M''_{k,l}\right\} = -\delta_{j,k}M''_{i,l} + \delta_{j,l}M''_{i,k} - \delta_{i,l}M''_{j,k} + \delta_{i,k}M''_{j,l}$$

(ii) $$\left\{L_i,L_j\right\} = \varepsilon_{i,j,k}L_k \;,\; \left\{L_i,A_j\right\} = \varepsilon_{i,j,k}A_k \;,\; \left\{A_i,A_j\right\} = \varepsilon_{i,j,k}L_k \;.$$

Démonstration. (i) résulte de l'annexe A.V, et (ii) résulte de (i).

Corollaire. *Les 6 composantes de L et A engendrent par crochets de Poisson une algèbre de Lie isomorphe à* o(4) *– résultat qu'on peut obtenir par des calculs directs, longs et fastidieux.*

n° IV.4. Action du groupe SO(4) sur l'espace des orbites képlériennes.

Ce groupe n'opère pas dans P, mais on va voir qu'il opère dans l'espace des orbites de cet espace. On va d'abord étudier son action dans l'espace des orbites de P'' ; on sait que ce dernier espace est paramétré par les valeurs de la fonction M''.

Lemme IV.1. *On note $\pi(g)$ (resp. $\lambda(\eta)$) l'action sur P'' d'un élément $g \in \mathrm{SO}(4)$ (resp. $\lambda \in \mathrm{o}(4)$). On fixe des éléments g et η et une fonction ψ sur P'' et on suppose que $\lambda(\eta) = X_{\psi}^{\omega''}$. On a alors $\lambda(\mathrm{Ad(g)}.\eta) = X_{\psi\circ\pi(g^{-1})}^{\omega''}$.*

Démonstration. Calcul direct en utilisant les relations :

$$X_{\psi}^{\omega''} = \sum_i \frac{\partial\psi}{\partial y_i}.\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi}{\partial x_i}.\frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\lambda(\eta) = \sum_{i,j} \eta_{i,j}(x_j.\frac{\partial}{\partial x_i} + y_j.\frac{\partial}{\partial y_i})$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_j} = -\sum_k \eta_{j,k} y_k \ , \ \frac{\partial\psi}{\partial y_j} = \sum_k \eta_{j,k} x_k \ .$$

ainsi que les relatons analogues obtenues en remplaçant ψ par $\psi\circ\pi(g^{-1})$ et η par $\mathrm{Ad}(g).\eta$.

Application. On peut déduire de là la façon dont un élément de la forme $g = \exp(tM''_{i,j})$ transforme les fonctions vectorielles L'' et A'' : on prend pour ψ une fonction de la forme $M''_{u,v}$ avec, soit $0 < u < v$ (pour obtenir L''), soit $0 = u < v$ (pour obtenir A''). Passant à P , on peut décrire la façon dont g opère dans l'espace des orbites képlériennes, paramétré par les valeurs des fonctions L et A ; prenant par exemple $g = \exp(tM''_{0,1})$, un calcul facile permet de retrouver le résultat démontré , par une autre méthode, dans Morehead, 2005.

Annexes

A.1. Variétés et formes différentielles.

Sans autres précisions, les variétés, fonctions, applications, formes différentielles, etc , sont supposées de classe C^∞. La valeur d'une p-forme différentielle ω sur un ensemble de p champs de vecteurs $\zeta_1,...,\zeta_p$ sera notée $\langle\omega\ ;\ \zeta_1,...,\zeta_p\rangle$; celle d'un champ de vecteurs ζ sur une fonction f sera notée $\langle\zeta,f\rangle$.

Produit intérieur d'une p-forme différentielle ω par un champ de vecteurs ζ : c'est la $(p-1)$ - forme différentielle définie par

$$\left\langle \mathrm{i}_\zeta.\omega\ ;\ \zeta_1,...,\zeta_{p-1}\right\rangle \ = \ \left\langle \omega\ ;\ \zeta,\zeta_1,...,\zeta_{p-1}\right\rangle \quad \forall\ \zeta_1,...,\zeta_{p-1}\ .$$

Différentielle d'une application $\Phi : \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$. En coordonnées locales, si

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x)\ ,...,\varphi_n(x))\ \ ,\ \ y = \Phi(x)\ \ ,$$

pour tout champ de vecteurs ζ sur φ :

$$(\mathrm{d}\Phi_x)(\zeta_x)\ =\ \sum_j \left\langle \zeta_x,\varphi_j\right\rangle .\frac{\partial}{\partial y_j}\ .$$

Image réciproque d'une p-forme différentielle ω sur $\mathcal{Y}$:

$$\left\langle \Phi^*(\omega)_x\ ;\ \zeta_1,...,\zeta_p\right\rangle \ = \ \left\langle \omega_y\ ;\ \mathrm{d}\Phi_x(\zeta_1),...,\mathrm{d}\Phi_x(\zeta_p)\right\rangle\ ;$$

pour toute fonction f sur $\mathcal{Y}$: $\Phi^*(f) = f\circ\Phi$.

Flot d'un champ de vecteurs ζ : il sera souvent noté $t\mapsto\Gamma_t$; autrement dit, pour tout $x\in\ \mathcal{X}$, $t\mapsto\Gamma_t(x)$ est la solution maximale de l'équation différentielle satisfaisant $\Gamma_0(x) = x$; celle-ci est définie sur un intervalle I_x ; l'**orbite** de x est l'ensemble $\{\Gamma_t(x)\,|\,t\in I_x\}$.

A.2. Variétés symplectiques.

Définition : couple $(\mathcal{X}, \omega)$ où ω est une 2-forme différentielle fermée symplectique, i.e. partout non-dégénérée .
Une application $\Phi : (\mathcal{X}, \omega) \to (\mathcal{X}', \omega')$ est dite *symplectique* si $\Phi^*(\omega') = \omega$.
Champ de vecteurs X_f^ω associé à ω et à une fonction f : c'est le champ de vecteurs ζ caractérisé par $\mathrm{i}_\zeta.\omega = -\mathrm{d}f$ i.e. $\langle \omega \,;\, \zeta, \eta \rangle = -\langle \eta, f \rangle$ pour tout champ de vecteurs η .
Le flot de X_f^ω est symplectique (théorème de Liouville).
Propriétés de X_f^ω .
. Pour tout réel non nul λ on a $X_f^{\lambda\omega} = \dfrac{1}{\lambda}.X_f^\omega$.
. Pour toute fonction réelle φ sur **R** on a $X_{\varphi\circ f}^\omega = (\varphi' \circ f).X_f^\omega$.
. Soit Φ une application $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, β une forme symplectique et g une fonction sur $\mathcal{Y}$,

$$\alpha = \Phi^*(\beta) \ , \ f = \Phi^*(g) \ , \ \zeta = X_g^\beta \ , \ \eta = X_f^\alpha \ , \ y = \Phi(x) \ .$$

On suppose que $\zeta_y \in \mathrm{T}_y(\mathrm{Im}\,\Phi)$ et que la restriction de β à $\mathrm{T}_y(\mathrm{Im}\,\Phi)$ est non-dégénérée. Alors $(\mathrm{d}\Phi)_x(\eta_x) = \zeta_y$.
Crochet de Poisson de deux fonctions f et g :

$$\{f, g\} = \langle \omega \,;\, X_f^\omega, X_g^\omega \rangle \ .$$

A.3. Espaces fibrés cotangents.

Pour toute variété Q les éléments de $\mathrm{T}^*(Q)$ sont notés (q, p) avec $p \in \mathrm{T}_\mathrm{q}^*(Q)$.
Il y a sur $\mathrm{T}^*(Q)$ deux formes différentielles canoniques :
. la 1-forme de Liouville $\alpha = \sum_i p_i.\mathrm{d}q_i$, notée $(p \,|\, \mathrm{d}q)$
. la 2-forme symplectique $\omega = \mathrm{d}\alpha = \sum_i \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$, notée $(\mathrm{d}p \,|\, \mathrm{d}q)$.
On a les relations

. $$X_f^\omega = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}.\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}.\frac{\partial}{\partial p_i}$$

. Crochet de Poisson $\{f, g\} = \sum_i \dfrac{\partial f}{\partial p_i}.\dfrac{\partial g}{\partial q_i} - \dfrac{\partial f}{\partial q_i}.\dfrac{\partial g}{\partial p_i}$.

A.4.Systèmes hamiltoniens.

Définition : triplet $(\mathcal{X}, \omega, H)$ où $(\mathcal{X}, \omega)$ est une variété symplectique et H une fonction réelle appelée *hamiltonien* .
Cela définit le *champ de vecteurs hamiltonien* X_H^ω et son flot, dit *flot hamiltonien* .

Cas du fibré cotangent à une variété riemannienne Q . Soit g_q le produit scalaire donné sur $\mathrm{T}_q(Q)$; cela permet de définir :

. un *lagrangien* sur $\mathrm{T}(Q)$: $L\ (q,v) = g_q(v,v)$;

. la *transformation de Legendre* (bijective) $F\ :\ \mathrm{T}(Q) \to \mathrm{T}^*(Q)$

$$F\ (q,v) = (q,p) \quad \text{où} \quad p = \frac{\partial L}{\partial v}(q,v) \ ;$$

. un *hamiltonien* H sur $\mathrm{T}^*(Q)$: $H(q,p) = L(F^{-1}(q,p))$.

Le flot de X_H^ω est le *flot géodésique* de la variété riemannienne Q .

A.5. Actions de groupes.

Soit G un groupe de Lie opérant sur une variété symplectique $(\mathcal{X}, \omega)$ en conservant ω , donc un morphisme de groupes $\pi : G \to \mathrm{Diff}(\mathcal{X})$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G opère par champs de vecteurs : on a un morphisme d'algèbres de Lie $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}(\mathcal{X})$, $\lambda(\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\ \pi(\exp t\xi)$.
On appelle *moment* pour π une application (s'il en existe) $J : \mathcal{X} \to \mathfrak{g}^*$ telle que $\lambda(\xi) = X^\omega_{\langle J,\xi\rangle}$ où $\langle J,\xi\rangle$ désigne la fonction $x \to \langle J(x),\xi\rangle$.
Cas où $\mathfrak{g} = \mathbf{R}$ et où $\mathcal{X} = \mathrm{T}^*(Q)$. On a alors un unique champ de vecteurs $\zeta = \lambda(1)$ noté $\zeta = \sum_i (\zeta_i' . \frac{\partial}{\partial q_i} + \zeta_i'' . \frac{\partial}{\partial p_i})$; une fonction réelle J est un moment si et seulement si

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = -\zeta_i'' \ , \ \frac{\partial J}{\partial p_i} = \zeta_i' \ .$$

Cas où $\mathcal{X} = \mathrm{T}^*(Q)$ **et où l'on a une action** π **de** G **sur** Q . On prolonge π à $\mathrm{T}(\pi)$ par

$$\pi'(g).(q,v) = (\pi(g).q\ ,\ (\mathrm{d}\pi(g)_q(v)) \ ,$$

puis en une action sur $\mathrm{T}^*(Q)$ par dualité. Il existe alors un *moment canonique* pour cette dernière action :

$$\langle J(q,p)\,,\,\xi\rangle \;=\; \left\langle p\,,\,\lambda(\xi)_q \right\rangle \,.$$

A.6. Terminologie historique (cf. par exemple Abraham-Marsden).

. Valeur d'une p-forme différentielle ω sur un ensemble de p champs de vecteurs $\zeta_1,...,\zeta_p$: $\omega(\zeta_1,...,\zeta_p)$.
. Coulée d'un champ de vecteurs : synonyme de flot .

. Intégrale première d'un champ de vecteurs ζ : toute fonction f constante sur les orbites de ζ , i.e. satisfaisant $\langle \zeta, f\rangle = 0$.

. Transformation canonique entre variétés symplectiques : synonyme de symplectique.

. Système hamiltonien : triplet $(\mathcal{X}\,,\,\omega,\,X_H^\omega)$.

. Crochet de Lagrange de deux champs de vecteurs ζ_1,ζ_2 : c'est la fonction réelle $\langle \omega\,;\zeta_1,\zeta_2\,\rangle$.

Index des notations

n° I.1. Q , (q,v) , $L(q,v)$, m , γ , (q,p) , $H(q,p)$, P_- , $p_0(q,p)$, α , ω , $\zeta = X_H^\omega$, Γ_t

n° I.2. $L(q,p)$, $A(q,p)$

n° I.3.2. $M(q,p)$, l , a , ε_1 , ε_2 , ε_3 , α , β , e , T

n° I.3.3. ε_1 , ε_2 , ε_3 , η , $(q'_{l,a}(\eta), p'_{l,a}(\eta))$, g_e , f_e , λ , $(q''_{l,a}(\lambda), p''_{l,a}(\lambda))$

n° II.1. $x = (x_0, \vec{x})$, α' , ω' , $\mathrm{T(S^3)}_0$, P' , P'_0 , α'' , ω'' , H'' , U , i , P'' , P''_0

n° II.2. J_u , J , J_0 , g_u

n° II.3. F' , $H'(u,w)$

n° II.4. Λ , α'' , ω'' , H'' , ζ'' , Γ''_t , F_t

n° II.5. L'' , A'' , M''

n° III.1. $P''_{0,-}$

n° III.2. Φ_0

n° III.3. Φ_φ

n° III.4. Φ_{LS} , φ_{LS}

n° III.5. $h(a,b)$

n° III.8.1. P_r , P''_r , (X,Y)

n° IV.2. J

Bibliographie

- A.Albouy. Communication écrite, 2010.
- Johann Bernoulli. Extrait de la réponse de M. Bernoulli à M. Herman. (Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, t. 1732, 1710, p. 521-544).
- D.E. Chang-J.E. Marsden. Geometric Derivation of the Delaunay Variables and Geometric Phases (Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, t. 86, 2003, p. 185-208).
- R.H.Cushman-J.J.Duisterman. A Characterization of the Ligon-Schaaf Regularization Map (Comm. Pure Applied Math., t. 50, 1997, p. 773-787).
- H.Goldstein. Prehistory of the « Runge-Lenz » vector. (Amer. J. Phys., t. 43, 1975, p. 737-738). More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector (ibid, t. 44, 1976, p. 1123-1124).
- A.Guichardet. Histoire d'un vecteur tricentenaire. (Gazette des Mathématiciens., t. 117, 2008, p. 23-33).
- G.Györgyi. Kepler's Equation, Fock Variables, Bacry's Generators and Dirac Brackets (Nuovo Cimento, t. A 53, 1968, p. 717-735).
- G.Heckman-T. de Laat. On the Regularization of the Kepler Problem (à paraître).
- J.Herman. Extrait d'une lettre de M.Herman à M.Bernoulli. (Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, t. 1732, 1710, p. 519-521).
- P.S. de Laplace. Traité de mécanique céleste (1799 et 1825) (Œuvres complètes, édition de 1878, numérisée par la Bibliothèque Nationale de France).
- T.Ligon-M.Schaaf. On the Global Symmetry of the Classical Kepler Problem (Rep. Math. Phys., t. 9, 1976, p. 281-300).
- C.M.Marle. A Property of Conformally Hamiltonian Vector Fields ; Application to the Kepler Problem (à paraître).
- J . Morehead. Visualizing the Extra Symmetry of the Kepler Problem (Am. J. Phys., t. 73(3), 2005, p. 234-239).
- J.Moser. Regularization of Kepler's Problem and the Averaging Method on a Manifold (Comm. Pure Applied math., t. XXIII, 1970, p. 609-636).
- I.Newton. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1687.
- H.H.Rogers. Symmetry Transformations of the Classical Kepler Problem. (J. Math. Phys., t. 14, 1973, p. 1125-1129).
- P.Varignon. Trois mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1700.
- Wikipedia. Laplace-Runge-Lenz vector.

Table des matières